

**Die zeitliche Nichtumkehrinvarianz  
der quantenmechanischen kinetischen Gleichung  
von Kadanoff und Baym**

Zlatiborka Nikolić

1976





Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41554612\\_0031](https://archive.org/details/IA41554612_0031)



Die zeitliche Nichtumkehrinvarianz der  
quantenmechanischen kinetischen Gleichung  
von Kadanoff und Baym

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereiches Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von  
Zlatiborka Nikolić

München  
Mai 1976

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juli 1976



## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir die quantenmechanische kinetische Gleichung von Kadanoff und Baym im Hinblick auf das Problem ihrer zeitlichen Nichtumkehrinvarianz untersucht. Es kam darauf an zu klären, welche der von diesen Autoren ausdrücklich oder stillschweigend gemachten Annahmen für die Irreversibilität der von ihrer Transportgleichung wiedergegebenen Phänomene maßgebend sind. In Frage kamen entweder Näherungen von der Art des Boltzmannschen Stoßzahlenansatzes, die ein "molekulares Chaos" zum Ausdruck bringen, oder aber Randbedingungen von einer mehr kosmologischen Natur, oder vielleicht auch eine Kombination von beiden.

Kadanoff und Baym gehen von der Bewegungsgleichung für die Komplex-Zeit-Einteilchen-Greenfunktion aus, die zeitumkehrinvariant ist. Die in dieser Gleichung auftretende Komplex-Zeit-Zweiteilchen-Greenfunktion drücken sie sodann mittels Störungstheorie als Funktional der Komplex-Zeit-Einteilchen-Greenfunktion aus und erhalten so eine geschlossene Bewegungsgleichung für die Komplex-Zeit-Einteilchen-Greenfunktion.

Um aus ihr mittels analytischer Fortsetzung die geschlossene Bewegungsgleichung für die Real-Zeit-Einteilchen-Greenfunktion zu erhalten, wird eine Rand- oder Grenzbedingung benötigt. Bei Kadanoff und Baym hat sie die Form einer "kausalen" Anfangsbedingung: Das System hat sich in der fernsten Vergangenheit im thermodynamischen Gleichgewicht befunden und wurde hieraus durch ein ebenfalls im Limes  $t_0 = -\infty$  eingeschaltetes äußeres Feld  $U(\vec{r}, t)$  herausgebracht. Aus der so gewonnenen Bewegungsgleichung haben Kadanoff und Baym die quantenmechanische Transportgleichung abgeleitet.

Unsere Untersuchungsmethode bestand zunächst darin, eine "Einteilchen-Antikausal-Greenfunktion" für komplexe Zeitargumente zu

definieren und für sie ebenfalls eine geschlossene Bewegungsgleichung herzuleiten. (In der Literatur ist bisher nur eine "Einteilchen-Antikausal-Greenfunktion" für reelle Zeitargumente aufgetreten.) Um daraus die Bewegungsgleichung für die reellen Zeitargumente zu erhalten, mußten wir nun die antikausale Rand- oder Grenzbedingung annehmen: Das System wird sich in der fernsten Zukunft im thermodynamischen Gleichgewicht befinden und wird hierzu durch ein ebenfalls im Limes  $t_0 = +\infty$  eingeschaltetes äußeres Feld  $V(\vec{r}, t)$  hineingebracht werden. Damit haben wir eine geschlossene Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Antikausal-Einteilchen-Greenfunktion erhalten. So war es möglich zu zeigen, daß die geschlossene Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Kausal-Einteilchen-Greenfunktion nicht umkehrinvariant ist. Die einzige Ursache dieser zeitlichen Unsymmetrie ist folglich die Asymmetrie der kosmologischen Randbedingung.

Anschließend wird, analog zu Kadanoff und Baym, aus der soeben genannten antikausalen Bewegungsgleichung eine quantenmechanische kinetische Gleichung mit negativem Stoßterm hergeleitet. Die dabei benutzten Näherungsannahmen wie zum Beispiel die langsame Veränderlichkeit des Störpotentials oder die hohe Verdünnung des Gases haben mit dem Vorzeichen der Zeitvariablen nichts zu tun und tragen daher zur Nichtumkehrinvarianz der kausalen (wie auch der antikausalen) Transportgleichung nicht bei.

Daraus geht hervor, daß die in der kinetischen Gleichung von Kadanoff und Baym enthaltene Irreversibilität in der Ableitung dieser Autoren allein auf die erwähnte kausale Randbedingung zurückzuführen ist.

Der Beitrag dieser Dissertation zur Lösung des allgemeinen Irreversibilitätsproblems besteht unseres Erachtens darin, daß hier zum ersten Mal die Ursache der Nichtumkehrinvarianz der quantenmechanischen Transportgleichung hinsichtlich des Umkehrinwandes geklärt worden ist. Dabei blieb die Problematik des Wiederkehrinwandes außer Betracht.

## Einleitung und Übersicht

Eines der Grundprobleme der theoretischen Physik ist die Irreversibilität des Geschehens. Die Grundgleichungen der Mechanik, Elektrodynamik, Quantentheorie und Thermodynamik, die das mikroskopische Verhalten des jeweiligen Systems beschreiben, sind zeitumkehrinvariant; dies aber steht im Widerspruch zu dem irreversiblen makroskopischen Verhalten des Systems.

In der Thermodynamik kommt dieser Widerspruch zum Vorschein dadurch, daß man bei der Ableitung der klassischen kinetischen Gleichung von der Liouvillschen Gleichung ausgeht, die zeitumkehrinvariant ist und durch die Annahme eines "molekularen Chaos" die kinetische Gleichung erhält, welche die irreversiblen Vorgänge beschreibt.

In der Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung wie etwa in der Monographie von Kadanoff und Baym erscheint dieser Widerspruch wieder.

Im Verfahren der Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung gehen Kadanoff und Baym<sup>1)</sup> stillschweigend über die Frage hinweg, auf welche Weise die Nichtumkehrinvarianz\* dieser Gleichung eingeführt worden ist. Wenn man aber berücksichtigt, daß diese Ableitung von der Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Green-Funktion ausgeht, die zeitumkehr-

---

\* Hier und im weiteren Text werden wir die Begriffe Reversibilität, Irreversibilität, Zeitumkehrinvarianz (T-Invarianz) und Nichtumkehrinvarianz im Sinne der von Bunge 2) gegebenen Definitionen verwenden, d.h. die ersten zwei Begriffe beziehen sich auf die Prozesse und die anderen zwei auf die Gesetze, welche die Prozesse beschreiben.

invariant ist, und daß man eine quantenmechanische kinetische Gleichung erhält, die nichtumkehrinvariant ist, wirft sich diese Frage von selbst auf.

Da zwischen der Ausgangs- und der Endgleichung umfangreiche mathematische Umformungen mit zahlreichen mathematischen Approximationen und physikalischen Annahmen liegen, so ist das erste Problem, das sich ergibt, wenn man versucht, auf diese Frage die Antwort zu geben, die erste Gleichung zu bestimmen, die nichtumkehrinvariant wird in der Reihe von Gleichungen, die zwischen der Ausgangsgleichung und der Endgleichung liegt.

Die Vielteilchen-Green-Funktionen genügen einer unendlichen Folge von nichtlinearen Differentialgleichungen. Zur Ableitung der kinetischen Gleichung wird nur die erste Gleichung dieser Folge verwendet, d.h. die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Green-Funktion, in der die Zweiteilchen-Green-Funktion als Funktional der Einteilchen-Green-Funktion ausgedrückt wird.

Dies weist auf die Ähnlichkeit der Methode von Kadanoff und Baym <sup>1)</sup> mit denjenigen für die klassische kinetische Gleichung, ausgehend von der Liouvillschen Gleichung über die B-B-K-G-Y-Hierarchie. <sup>3)</sup>

Aufgrund dieser Analogie kann man leicht zu der Vermutung gelangen, daß die Nichtumkehrinvarianz auch in der Methode von Kadanoff und Baym durch den approximativen Ausdruck für die Zweiteilchen-Green-Funktion eingeführt wird, bzw. daß man bei der Ab-

leitung dieses Ausdruckes eine Annahme macht, die derjenigen des "molekularen Chaos" <sup>4) 5)</sup> in der klassischen Physik entspricht.

Eine zweite intuitive Vermutung ist diejenige, wonach die Nichtumkehrinvarianz durch das Verfahren der analytischen Fortsetzung <sup>6) 7) 8)</sup> eingeführt wird.

Für die Feststellung der Zeitumkehrinvarianz der Bewegungsgleichungen der Green-Funktionen ist es aber wegen der Einzigartigkeit der Green-Funktionen, welche Funktionen von zwei oder mehreren Zeitargumenten sind, nicht möglich das Wigner-Kriterium <sup>9) 10) 11)</sup> der Zeitumkehrinvarianz, welches für die Schrödingersche Gleichung gilt, direkt anzuwenden.

Aus diesen Gründen mußten wir zuerst jene Funktion definieren, welche die zeitumgekehrte Lösung der Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Green-Funktion darstellt bzw. die sich auf das zeitumgekehrte System bezieht.

Im Kapitel 4 werden wir beweisen, daß eine solche Funktion die "Antikausal-Einteilchen-Green-Funktion", als Erwartungswert des antichronologischen Produkts von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren definiert werden kann.

Wir betonen, daß die Antikausal-Green-Funktion als solche für die reellen Zeitargumente schon früher definiert und benutzt wurde, <sup>12) 13) 14)</sup> jedoch aus ganz anderen Gründen und zu ganz anderen Zwecken als in unserer Problemstellung.

Die Methode von Kadanoff und Baym beruht auf der Anwendung der Green-Funktionen, die für komplexe Zeitargumente definiert sind. Für diese kann nämlich eine geschlossene Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Green-Funktion im komplexen Zeitbereich abgeleitet werden, <sup>15)</sup> und aus dieser kann mittels analytischer Fortsetzung zu reellen Zeitargumenten die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Green-Funktion für die reellen Zeitargumente erhalten werden.

Um also nach jeder abgeleiteten Transformation der Ausgangsgleichung die Zeitumkehrinvarianz der neuen Gleichung prüfen zu können, ist es erforderlich, die Antikausal-Green-Funktion für die komplexen Zeitargumente zu definieren. Das Verfahren, durch welches diese Funktion im Kapitel 1 und 2 eingeführt wird, ist dem Verfahren ähnlich, durch welches Mills <sup>16)</sup> die Kausal-Green-Funktion für die komplexen Zeitargumente definiert hat.

Im Kapitel 3 haben wir die Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Antikausal-Einteilchen-Green-Funktion abgeleitet, und dies hat es uns ermöglicht, im Kapitel 4 das Kriterium aufzustellen, aufgrund dessen bestimmt wird, ob eine Gleichung zeitumkehrinvariant ist oder nicht, und welches der Methode der Green-Funktionen angepaßt ist.

Um die Zeitumkehrinvarianz der geschlossenen Bewegungsgleichung für die Komplex-Zeit-Kausal-Einteilchen-Green-Funktion zu prüfen, haben wir im Kapitel 5 die Antikausal-Green-Funktion für ein System mit äußerem Feld definiert, und

im Kapitel 6 haben wir den approximativen Ausdruck für die Komplex-Zeit-Zweiteilchen-Antikausal-Green-Funktion bestimmt und die geschlossene Bewegungsgleichung für die Komplex-Zeit-Einteilchen-Antikausal-Green-Funktion abgeleitet.

Nachdem diese Gleichung erhalten wurde, konnte leicht gezeigt werden, daß die geschlossene Bewegungsgleichung für die Komplex-Zeit-Kausal-Einteilchen-Green-Funktion zeitungkehrinvariant ist. Dadurch ist unsere oben erwähnte Vermutung, die Nichtumkehrinvarianz in der Methode von Kadanoff und Baym sei durch die Annahme eingeführt, die jener Hypothese über "molekulares Chaos" in der klassischen Physik ähnelt, entfallen. (Näheres hierüber im Kapitel 6).

Nachdem nun diese Vermutung verworfen wurde, haben wir unsere Aufmerksamkeit der Methode der analytischen Fortsetzung gewidmet. Im Kapitel 7 haben wir den mathematischen Inhalt dieses Verfahrens und die Rolle der physikalischen Annahme, daß das äußere Feld im Limes  $t_0 = -\infty$  im System eingeschaltet wird, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, detaillierter erörtert.

Bei Kadanoff und Baym <sup>6)</sup> wurde dieses Verfahren ziemlich formalistisch dargelegt, und dies führt wiederum zu großen Schwierigkeiten im Verständnis der ganzen Methode.

Im Kapitel 8 haben wir das Verfahren der analytischen Fortsetzung für den Fall der Antikausal-Green-Funktion dargestellt und die Bewegungsgleichung für die Antikausal-Green-Funktion für die reellen Zeitargumente abgeleitet, davon ausgehend, daß das äußere Feld im Limes  $t_0 = +\infty$  eingeschaltet wird.

Mittels dieser Gleichung haben wir im Kapitel 9 bewie-

sen, daß die geschlossene Bewegungsgleichung für die Ein-  
teilchen-Green-Funktion für die reellen Zeitargumente nicht-  
umkehrinvariant ist.

Um zu beweisen, daß die Ursache der Nichtumkehrinvarianz  
in der Annahme liegt, das System befindet sich im thermodyna-  
mischen Gleichgewicht in der fernen Vergangenheit, und daß es aus  
diesem durch Einschalten eines äußeren Feldes im Limes  $t_0 = -\infty$   
herausgebracht wird, haben wir die geschlossene Bewegungsgleichung  
für die Reel-Zeit-Antikausal-Green-Funktion analysiert.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß diese Bewegungsgleichung  
unter der Grenzbedingung abgeleitet wurde, das System befinde  
sich in der fernen Zukunft im thermodynamischen Gleichgewicht,  
und daß es durch Einschalten des äußeren Feldes im Limes  $t_0 = +\infty$   
aus dem Gleichgewicht herausgebracht wird, haben wir versucht aus  
dieser Bewegungsgleichung die quantenmechanische Boltzmann-Glei-  
chung abzuleiten. Zur Ableitung dieser Gleichung war zuerst erfor-  
derlich, die Relation zwischen der Antikausal-Green-Funktion und  
der entsprechenden Verteilungsfunktion festzustellen, wie in Kapi-  
tel 10 dargestellt wird.

In Kapitel 11 haben wir gezeigt, daß man aus der geschlossenen  
Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Antikausal-Green-Funktion  
und der Hypothese, daß sich das äußere Feld im Limes  $t_0 = +\infty$   
einschaltet, die "Boltzmann-Gleichung" mit negativem Stoßterm er-  
hält. Daraus kann die Schlußfolgerung abgeleitet werden, daß die  
Wahl der Grenzbedingung, wonach sich das System in ferner Vergan-  
genheit im thermodynamischen Gleichgewicht befinde, und aus diesem  
durch Einschalten des äußeren Feldes herausgebracht wird, die irre-  
versible Bewegung gegen die Zukunft hin bestimmt.

Im Kapitel 12, dem letzten, diskutieren wir die Ursache  
der Nichtumkehrinvarianz in der Methode von Kadanoff und

Baym und vergleichen unsere Ableitung der "antikausalen Boltzmann-Gleichung" mit früheren klassischen Ableitungen dieser Gleichung. 17) 18) 19)



| Inhalt                                                                                                                          | Seite |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung und Übersicht                                                                                                        | I-VII |
| 1. Die Definition der Einteilchen-Antikausal Green-Funktion für komplexe Zeitargumente                                          | 1     |
| 2. Der Bereich in dem die Antikausal-Green-Funktion analytisch ist                                                              | 9     |
| 3. Die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Antikausal-Green-Funktion                                                         | 16    |
| 4. Die Zeitumkehrinvarianz der Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Kausal-Green-Funktion                                     | 20    |
| 5. Die Definition der Antikausal-Green-Funktion für ein System, auf welches das äußere akalarre Potential $U(\vec{r}, t)$ wirkt | 25    |
| 6. Die Ableitung des approximativen Ausdrucks für die Zweiteilchen-Antikausal-Green-Funktion                                    | 34    |
| 7. Die analytische Fortsetzung der Komplex-Zeit Kausal-Green-Funktion für reelle Zeitargumente                                  | 45    |
| 8. Die analytische Fortsetzung der Komplex-Zeit-Antikausal-Green-Funktion für reelle Zeitargumente                              | 60    |
| 9. Beweis, daß die Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Einteilchen-Kausal-Green-Funktion nichtumkehrinvariant ist             | 71    |
| 10. Die Relation zwischen der Antikausal-Green-Funktion und der "antikausalen Verteilungsfunktion"                              | 76    |

|                                                                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11. Die Ableitung der quantenmechanischen<br>"antikausalen kinetischen Gleichung" und<br>der "antikausalen Boltzmann-Gleichung"                                           | 80  |
| 12. Ursache der Irreversibilität                                                                                                                                          | 89  |
| Anhang A. Die Erweiterung der Definition der Antikausal-<br>Green-Funktion (1.1) auf komplexe Zeitargumen-<br>te                                                          | 93  |
| Anhang B. Transformation der Funktional-Differential-<br>gleichung für die Antikausal-Green-Funktion<br>(6.11) in die Funktional-Integralgleichung<br>(6.14)              | 100 |
| Anhang C. Transformation der Bewegungsgleichung für<br>die Reell-Zeit-Antikausal-Green-Funktion<br>(11.1) bzw. (11.2) für den Fall eines langsam<br>veränderlichen Feldes | 105 |
| Anhang D. Die "Wigner-Transformation" der Gleichung<br>(11.5)                                                                                                             | 113 |
| Anhang E. Die Ableitung der "antikausalen Boltzmann-<br>Gleichung" (11.20)                                                                                                | 121 |
| Literaturverzeichnis                                                                                                                                                      | 126 |

# 1. Die Definition der Einteilchen-Antikausal-Green-Funktion für komplexe Zeitargumente

---

Die Einteilchen-Antikausal-Green-Funktion\* wird als quantenstatistischer Mittelwert des antichronologischen Produkts des Vernichtungs- und Erzeugungsoperators definiert

$$\tilde{G}(\vec{r}, t, \vec{r}_0, t_0) = i \frac{\text{tr} \left\{ e^{-\beta(H - \mu N)} [\tilde{T}(\psi_H(\vec{r}, t) \psi_H^+(\vec{r}_0, t_0))] \right\}}{\text{tr} [e^{-\beta(H - \mu N)}]} \quad (1.1)$$

wobei sich die Mittelung nach der großkanonischen Gesamtheit der Eigenzustände des Systems vollzieht, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. 12)

$\psi_H(\vec{r}, t)$  und  $\psi_H^+(\vec{r}_0, t_0)$  sind die Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren eines Teilchens im Heisenberg-Bild,

$\mu$  ist das chemische Potential,

$N$  bezeichnet die Anzahl der Teilchen im System,

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ , wobei  $T$  die absolute Temperatur des Systems ist.

$k_B$  Boltzmann-Konstante,

$\tilde{T}$  Antichronologischer Operator.

---

\* Im weiteren Text AKGF, bzw. AKgF, siehe Seite 8.

Der antichronologische Operator hat die entgegengesetzte Wirkung des chronologischen Operators  $T$ , indem er nach der antichronologischen Reihenfolge ordnet, derart, daß diejenigen Operatoren mit dem größeren Zeitargument rechts und diejenigen mit dem kleineren links stehen. Für Bosonen ist das der gesamte Effekt des Operators  $\tilde{T}$ . Für Fermionen dagegen wird  $\tilde{T}$  so definiert, daß er den Faktor  $\pm 1$  umfaßt, je nachdem, ob das resultierende antichronologisch geordnete Produkt die gerade oder ungerade Permutation des Originalproduktes ist.

$$\begin{aligned} \tilde{T}[\Psi(t) \Psi^\dagger(t_0)] &= \Psi(t) \Psi^\dagger(t_0) \quad \text{für } t_0 > t \\ &= \pm \Psi^\dagger(t_0) \Psi(t) \quad \text{für } t_0 < t. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Der Ausdruck (1.1) kann in der Kurzform

$$\tilde{G}(t, t_0) = i 2^{-1} \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} (\tilde{T} \Psi_N(t) \Psi_N^\dagger(t_0))] \quad (1.3)$$

geschrieben werden, wobei  $\bar{H} = H - \mu N$  und  $2 = \text{tr} e^{-\beta \bar{H}}$  die großkanonische Zustandssumme ist.

Durch den Ausdruck (1.1) ist die AKGF für reelle Zeitargumente  $t$  und  $t_0$  definiert. Wie wir aber

bereits in der Einleitung gesagt haben, benötigen wir die Definition dieser Funktion für die komplexen Zeitargumente. Die Erweiterung der obigen Definition für komplexe Zeitargumente  $t_0$  und  $t$  kann unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Summe über Zustände in (1.3) konvergiert, auf folgende Weise vorgenommen werden;\*

Schreiben wir zunächst  $\mathcal{Z}$  in der Form des Mittelwertes im Wechselwirkungsbild:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}}] \\ &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} e^{\beta \bar{H}_0} e^{-\beta \bar{H}}],\end{aligned}\tag{1.4}$$

worin  $\bar{H}_0 = H_0 - \mu N$  ist und  $H_0$  den Hamilton-Operator für das System der freien Teilchen darstellt. Wenn wir in der Gleichung (1.4) die Faktoren  $e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H_0} = 1$  und  $e^{i\tau^* H} e^{-i\tau^* H} = 1$  einsetzen, in denen  $\tau$  eine beliebige komplexe Zahl und  $\tau^*$  ihr konjugiert-komplexer Wert ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} e^{\beta H_0} e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H_0} \\ &\quad \times e^{-\beta H} e^{i\tau^* H} e^{-i\tau^* H}].\end{aligned}\tag{1.5}$$

Indem wir verwenden, daß die Spur invariant ist in Bezug auf die zyklische Permutation des Operators, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \\ &\quad \times e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0}].\end{aligned}\tag{1.6}$$

---

\* siehe Anhang A

Es ist bekannt, daß der Operator  $u(t)$ , der den Übergang vom Heisenberg- in das Wechselwirkungsbild bestimmt, als

$$u(t) = e^{i H_0 t} e^{-i H t}$$

definiert wird. Analog läßt sich derselbe Operator auch für das imaginäre Zeitargument definieren; <sup>16)</sup>

$$u(\tau) = e^{i H_0 \tau} e^{-i H \tau} \quad (1.7)$$

wobei die Funktion  $u^+(\tau)$  nicht mehr die hermitesch konjugierte, sondern eher "hermitesch adjungierte Funktion" genannt werden könnte

$$u^+(\tau) = [u(\tau^*)]^+ = e^{i \tau H} e^{-i \tau H_0} \quad (1.8)$$

Wenn wir die Definition (1.8) auf unseren Fall anwenden, gewinnen wir die Relation

$$\begin{aligned} [u(\tau^* + i\beta)]^+ &= [u(\tau - i\beta)]^+ \\ &= [e^{i(\tau - i\beta)H_0} e^{-i(\tau - i\beta)H}]^+ \\ &= e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Einsetzen der Gleichungen (1.7) und (1.9) in Gleichung (1.6) ergibt das Resultat:

$$\mathcal{Z} = \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} u(\tau^*) u^\dagger(\tau^* + i\beta)] . \quad (1.10)$$

Unter Benutzung der Relation zwischen dem Operator  $u(\tau)$  und dem Zeitverschiebungsoperator  $u(\tau, t_0)$  :

$$u(\tau, t_0) = u(\tau) u^\dagger(t_0) \quad (1.11)$$

die auch für die komplexen Zeitargumente gilt, erhalten wir

$$u(\tau^*) u^\dagger(\tau^* + i\beta) = u(\tau^*, \tau^* + i\beta) . \quad (1.12)$$

Demnach ist gemäß Gleichungen (1.10) und (1.12):

$$\mathcal{Z} = \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} u(\tau^*, \tau^* + i\beta)] . \quad (1.13)$$

Betrachten wir nun die Definition (1.3) und nehmen wir der Einfachheit halber an, daß  $t_0 > t$  ist, so ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{G}}^<(\tau, t_0) = i \mathcal{Z}^{-1} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(\tau) \psi_H^\dagger(t_0)] . \quad (1.14)$$

Der Ausdruck

$$\text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(\tau) \psi_H^\dagger(t_0)]$$

läßt sich in der Fassung für den komplexen Zeitbereich auf folgende Weise transformieren:

Zuerst wenden wir die zyklischen Spureigenschaften an und erhalten die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \\ &= \text{tr} [\psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta \mathcal{M} N}] . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Durch Einsetzen des Faktors  $e^{i\tau^* H} e^{-i\tau^* H} = 1$  in den obigen Ausdruck erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \\ &= \text{tr} [e^{i\tau^* H} e^{-i\tau^* H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta \mathcal{M} N}] \end{aligned} \quad (1.16)$$

die anhand der zyklischen Spureigenschaften in die Gleichung

$$\begin{aligned} & \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \\ &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} u(\tau^*) \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) u^\dagger(\tau^* + i\beta)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

transformiert werden kann.

Wenn wir die Heisenberg-Operatoren im obigen Ausdruck durch die Operatoren im Wechselwirkungsbild ausdrücken, d.h.

$$\psi_H(t) = u^\dagger(t) \psi(t) u(t) ,$$

$$\psi_H^\dagger(t_0) = u^\dagger(t_0) \psi^\dagger(t_0) u(t_0)$$

erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \text{tr}[e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \\ &= \text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mathcal{U}(\tau^*, t) \psi(t) \mathcal{U}(t, t_0) \psi^\dagger(t_0) \mathcal{U}(t_0, \tau^* + i\beta)] . \end{aligned} \quad (1.18)$$

Mittels der Gleichungen (1.13) und (1.18) läßt sich schließlich der Ausdruck (1.14) in der Form:

$$\tilde{G}(t, t_0) = i \frac{\text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mathcal{U}(\tau^*, t) \psi(t) \mathcal{U}(t, t_0) \psi^\dagger(t_0) \mathcal{U}(t_0, \tau^* + i\beta)]}{\text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mathcal{U}(\tau^*, \tau^* + i\beta)]} \quad (1.19)$$

schreiben. Der Ausdruck (1.19) stellt die Definition der AKGF für die komplexen Zeitargumente  $t$  und  $t_0$  dar.

Die komplexen Zeitargumente  $t$  und  $t_0$  befinden sich jetzt, wie man aus Definition (1.19) sieht, auf einem beliebigen Weg in der komplexen Ebene welcher die Punkte  $\tau^* + i\beta$  und  $\tau^*$  verbindet. In unserem Fall verläuft der Weg von  $\tau^* + i\beta$  über  $t_0$  nach  $t$  zum Endpunkt  $\tau^*$ , Bild 1.



Bild 1

Den derart geschriebenen Ausdruck für die AKGF können wir leicht mit dem entsprechenden Ausdruck für die Kausal-Green-

Funktion (KGF) 20)

$$G^>(t, t_0) = -i \frac{\text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau - i\beta, t) \psi(t) \mu(t, t_0) \psi^\dagger(t_0) \mu(t_0, \tau)]}{\text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau, \tau - i\beta)]} \quad (1.20)$$

vergleichen, und dadurch zeigen, daß die Beziehung

$$[G^>(t_0, t)]^* = \tilde{G}^<(t, t_0) \quad (1.21)$$

für  $t$  und  $t_0$  komplex gilt. Dies bedeutet, daß die auf diese Weise definierte AKGF für den komplexen Zeitbereich im gleichen Verhältnis zu der Komplex-Zeit-Kausal-Green-Funktion (KGF) steht wie die AKGF, die für die reellen Zeitargumente definiert ist, zu der Reell-Zeit-Kausal-Green-Funktion (KGF). Damit ist die Richtigkeit des obigen Erweiterungsverfahrens der Definition der AKGF auf den komplexen Zeitbereich bestätigt.

## 2. Der Bereich in dem die Antikausal-Green-Funktion analytisch ist

---

Damit die Definition der AKGF für die komplexen Zeitargumente vollständig wird, ist es erforderlich, den komplexen Zeitbereich, in welchem sie analytisch ist, zu bestimmen. Dieser Bereich kann unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß die Exponenten  $e^{-\beta \bar{H}}$  und  $e^{\pm i H \tau}$  in jedem Glied der Entwicklung nach den Eigenzuständen des Systems im Ausdruck für den Erwartungswert dominieren, der für die großkanonische Gesamtheit geschrieben wird, und daß die Feldoperatoren Matricelemente  $\neq 0$  nur zwischen den Zuständen haben, deren Teilchenzahl sich um eins unterscheidet.<sup>16)</sup> Unter dieser Voraussetzung kann leicht gezeigt werden, daß die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild als:

$$\psi_H(t) = e^{i\mu t} e^{i\bar{H}t} \psi_s e^{-i\bar{H}t}, \quad (2.1)$$

$$\psi_H^+(t_0) = e^{i\mu t_0} e^{i\bar{H}t_0} \psi_s^+ e^{-i\bar{H}t_0}$$

geschrieben werden können, wobei  $\bar{H} = H - \mu N$  ist.

Für  $t < t_0$  läßt sich (1.3) als

$$\tilde{G}^<(t, t_0) = i 2^{-1} \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^+(t_0)] \quad (2.2)$$

schreiben.

Einsetzen der Gleichung (2.1) in Gleichung (2.2) ergibt das Resultat

$$\tilde{G}^<(t, t_0) = i 2^{-1} \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}} e^{i \mu t} e^{i \bar{H} t} \psi_s e^{-i \bar{H} t} \right. \\ \left. \times e^{-i \mu t} e^{i \bar{H} t} \psi_s^\dagger e^{-i \bar{H} t} \right]. \quad (2.3)$$

Wenn wir die Spur in der entwickelten Form nach den Eigenzuständen des Operators  $\bar{H}$  schreiben und die Vollständigkeit der Eigenzustände des Operators  $\bar{H}$  verwenden, erhalten wir:

$$\tilde{G}^<(t, t_0) = i 2^{-1} e^{i \mu (t_0 - t)} \sum_{\lambda, \nu} e^{-i \bar{E}_\lambda (t_0 - t - i \beta)} \\ \times \langle \lambda | \psi_s | \nu \rangle e^{i \bar{E}_\nu (t_0 - t)} \langle \nu | \psi_s^\dagger | \lambda \rangle. \quad (2.4)$$

Die Indizes  $\lambda$  und  $\nu$  kennzeichnen die Eigenzustände des Operators  $\bar{H}$ . Aus dem Ausdruck (2.4) können wir unmittelbar schließen, daß die AKGF eine Funktion der Differenz  $t_0 - t$  der Zeitargumente  $t_0$  und  $t$  ist wie die KGF.

Wenn wir die AKGF als Funktion der Zeit betrachten, dann sehen wir aus Gleichung (2.4.), daß sie aus dem Exponentialfaktor  $e^{i \mu (t_0 - t)}$  besteht, das die vollständige Zeitfunktion ist, sowie aus den zwei Exponentialfaktoren  $e^{i \bar{E}_\nu (t_0 - t)}$  und  $e^{-i \bar{E}_\lambda (t_0 - t - i \beta)}$  und welche offenbar die Konvergenz bestimmen.

Wie wir im vorigen Kapitel schon gesagt haben gilt der Ausdruck (2.4) auch für beliebige komplexe Zeitargumente  $t_0$  und  $t$ .

Deswegen können wir den ersten Faktor in der folgenden

Form

$$\begin{aligned} e^{i \bar{E}_v(t_0-t)} &= e^{i \bar{E}_v [\operatorname{Re}(t_0-t) + i \operatorname{Im}(t_0-t)]} \\ &= e^{i \bar{E}_v \operatorname{Re}(t_0-t)} e^{-\operatorname{Im}(t_0-t) \bar{E}_v} \end{aligned} \quad (2.5)$$

schreiben und so sehen wir unmittelbar, daß er exponentiell konvergiert, wenn

$$\operatorname{Im}(t_0-t) > 0. \quad (2.6)$$

Wenn wir den zweiten Faktor als

$$\begin{aligned} e^{-i \bar{E}_A(t_0-t-i\beta)} &= e^{-i \bar{E}_A [\operatorname{Re}(t_0-t) + i \operatorname{Im}(t_0-t) - i\beta]} \\ &= e^{-i \bar{E}_A \operatorname{Re}(t_0-t)} \\ &\quad \times e^{[\operatorname{Im}(t_0-t) - \beta] \bar{E}_A} \end{aligned} \quad (2.7)$$

schreiben, sehen wir, daß er für

$$\operatorname{Im}(t_0-t) < \beta \quad (2.8)$$

konvergiert.

Aufgrund der Ausdrücke (2.7) und (2.8) schließen wir, daß

$\tilde{G}(t, t_0)$  im Intervall

$$0 < \underline{I}_m(t_0 - t) < \beta \quad (2.9)$$

analytisch ist. Die Grenzwerte der analytischen Funktion an der Grenze des Bereichs, in dem sie analytisch ist, sind die Distributionen, u.a.  $\delta$ -Funktionen und ihre Ableitungen, <sup>21)</sup> so daß wir schließlich schreiben können, daß

$\tilde{G}(t, t_0)$  auch an den Intervallgrenzpunkten definiert ist

$$0 \leq \underline{I}_m(t_0 - t) \leq \beta \quad . \quad (2.10)$$

Dies bedeutet, daß  $t_0$  und  $t$  auf dem Weg von Bild 1 liegen sollen. Wenn wir den Ausdruck (2.19) aus dem vorangegangenen Kapitel wieder betrachten, der unter der Voraussetzung ausgeführt wird, daß  $\tau$  eine beliebige komplexe Zahl ist, dann können wir  $\tau = 0$  bzw.  $\tau^* = 0$  auswählen.

Dies bedeutet, daß der Weg von Bild 1 jetzt zwischen den Punkten  $i\beta$  und  $0$  liegt. Dann erhält man für  $\tilde{G}^<(t, t_0)$  den Ausdruck

$$\tilde{G}^<(t, t_0) = i \frac{\text{tr} [e^{-\beta \tilde{H}_0} u(0, t) \psi(t) u(t, t_0) \psi^\dagger(t_0) u(t_0, i\beta)]}{\text{tr} [e^{-\beta \tilde{H}_0} u(0, i\beta)]} \quad (2.11)$$

Darin stellen die Operatoren  $u(0, t)$ ,  $u(t, t_0)$ ,  $u(t_0, i\beta)$  und  $u(0, i\beta)$  für den Fall  $0 \leq \underline{I}_m t \leq \underline{I}_m t_0 \leq \beta$  die inversen

Operatoren der entsprechenden Zeitverschiebungsoperatoren dar. Unter Berücksichtigung, daß es sich hierbei nur um die inversen Operatoren handelt, werden wir die übliche Bezeichnung für den inversen Operator künftig weglassen.

Es kann gezeigt werden, daß diese Operatoren folgender Bewegungsgleichung genügen: 22)

$$-i \frac{\partial}{\partial t_0} \mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t, t_0) H'(t_0) \quad (2.12)$$

mit der Grenzbedingung  $\mathcal{U}(t_0, t_0) = 1$ , worin

$$H'(t_0) = e^{iH_0 t_0} H_0 e^{-iH_0 t_0} \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung (2.13) läßt sich in die folgende Integralform transformieren 14)

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' H'(t') \right] \right\} \quad \text{für } t_0 > t. \quad (2.13)$$

Dieser Ausdruck ist für die reellen Zeitargumente abgeleitet worden, gilt aber auch für komplexe Zeitargumente unter der

Voraussetzung, daß die Definition

$$H'(t) = e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} \quad \text{auch für komplexes } t$$

gilt. 23) Dadurch ist in dem Ausdruck (2.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0, i\beta) &= \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{i\beta}^0 dt' H'(t') \right] \right\}, \\ \mathcal{U}(t_0, i\beta) &= \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{i\beta}^{t_0} dt' H'(t') \right] \right\}, \\ \mathcal{U}(0, t) &= \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_t^0 dt' H'(t') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Lösung der Gleichung (2.12) läßt sich durch den Operator

$$\tilde{S} = \mathcal{U}(0, i\beta) = \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{i\beta}^0 dt' H'(t') \right] \right\}$$

ausdrücken in dem die Integration längs desjenigen Weges  $C$  in der komplexen Zeitebene vorgenommen wird, der in dem Punkt  $i\beta$  anfängt, durch den Punkt  $t_0$  geht (für den Fall  $\text{Im } t_0 > \text{Im } t$ ), danach durch  $t$  führt und im Koordinatenanfang endet. Wenn  $t$  und  $t_0$  als rein imaginäre Zahlen gewählt werden, liegt der Weg  $C$  auf der imaginären Achse zwischen dem Punkt  $i\beta$  und dem Koordinatenanfang, Bild 2.

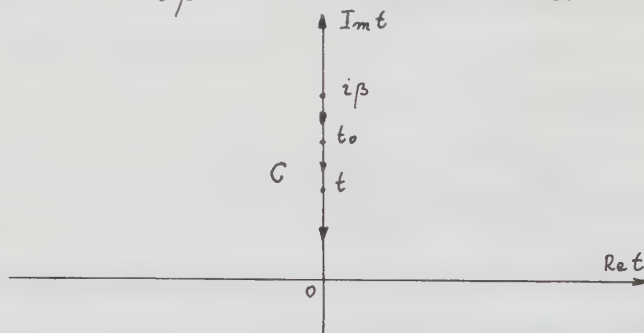


Bild 2

Der antichronologische Operator  $\tilde{T}$  wird jetzt so definiert, daß er die Feldoperatoren nach der Reihenfolge der Zeitargumente  $t$  und  $t_0$  längs des Weges von Bild 2 ordnet.

Mit Hilfe des Operators  $\tilde{S}$  können wir die Definition (2.12)

für  $\tilde{G}(t, t_0)$  in der Form

$$\tilde{G}(t, t_0) = i \frac{\langle \tilde{\pi} [\tilde{S} \psi(t) \psi^*(t_0)] \rangle}{\langle \tilde{\pi} [\tilde{S}] \rangle} \quad (2.15)$$

schreiben unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild gegeben sind. Durch den Ausdruck (2.15) ist die AKGF für die komplexen Zeitar- gumente auf dem Segment  $[0, i\beta]$  vollständig definiert.

Nach längerer Rechnung, die der bei Kadanoff und Baym <sup>24)25)</sup> gegebenen ähnlich ist und daher nicht angeführt wird, fin- det man, daß die AKGF der quasiperiodischen Grenzbedingung

$$\tilde{G}^>(1,1')_{t'=0} = \pm e^{\mu\beta} \tilde{G}^<(1,1')_{t'=i\beta} \quad (2.16)$$

genügt.

### 3. Die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Anti- kausal-Green-Funktion

---

Die Bewegungsgleichung für die ETAKGF\* soll so abgeleitet werden, daß wir von der Bewegungsgleichung für die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren im Heisenberg-Bild ausgehen.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= [\psi(\vec{r}, t), H(t)], \\ i \frac{\partial \psi^\dagger(\vec{r}, t)}{\partial t} &= [\psi^\dagger(\vec{r}, t), H(t)]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$H(t)$  stellt den Hamilton-Operator für ein System von N identischer Teilchen der Masse m dar, die untereinander durch das Potential der Paar-Wechselwirkung  $V(\vec{r})$  wechselwirken.<sup>26)</sup>

$$\begin{aligned} H(t) &= \int d\vec{r} \frac{\nabla \psi^\dagger(\vec{r}, t) \cdot \nabla \psi(\vec{r}, t)}{2m} \\ &+ \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}_2 \psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi^\dagger(\vec{r}_2, t) V(|\vec{r} - \vec{r}_2|) \psi(\vec{r}_2, t) \psi(\vec{r}, t), \quad \frac{\hbar}{m} = 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Feldoperatoren im Ausdruck (3.2) sind alle für das gleiche Zeitargument t definiert. Da aber für die Ableitung der Bewegungsgleichung für die AKGF die Reihenfolge der Operatoren wichtig ist, werden wir annehmen, daß sich die Zeitargumente der Feldoperatoren im zweiten Glied auf der rechten Seite der Gleichung (3.2) voneinander um einen infinitesimalen Wert unterscheiden. Da es sich hier um die AKGF und

---

\* ETAKGF=AKGF

die antichronologische Reihenfolge der Feldoperatoren handelt, werden wir die Zeitargumente so wählen, daß zuerst der Operator mit dem größten Zeitargument, dann diejenigen mit den kleineren Argumenten und schließlich der mit kleinstem Argument wirkt. Unter dieser Nebenbedingung läßt sich der Hamilton-Operator symbolisch schreiben als

$$H(t) = \int d\vec{r} \frac{\nabla \psi^\dagger(\vec{r}, t) \cdot \nabla \psi(\vec{r}, t)}{2m} \\ + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}_2 \psi^\dagger(\vec{r}, t^-) \psi^\dagger(\vec{r}, t^-) \\ \times V(|\vec{r} - \vec{r}_2|) \psi(\vec{r}_2, t^-) \psi(\vec{r}, t), \quad (3.3)$$

worin  $t^-$  ein Zeitargument bezeichnet, das infinitesimal kleiner als  $t$  ist. Entsprechend ist  $t^{--}$  infinitesimal kleiner als  $t^-$ .

Mit dem derart definierten Hamilton-Operator erhalten wir die Bewegungsgleichung für Operator  $\psi(\vec{r}, t)$  als

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right] \psi(\vec{r}_1, t_1) \quad (3.4)$$

$$= \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2^-) \psi(\vec{r}_2, t_2^-) \psi(\vec{r}_1, t_1) |_{t_2=t_1}.$$

Wenn wir diese Gleichung von rechts mit dem Operator  $\psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1)$  multiplizieren und auf die beiden Seiten den Operator  $\tilde{T}$  wirken lassen, dann die Mittelung der beiden Gleichungsseiten nach der großkanonischen Gesamtheit vornehmen

und dabei die Eigenschaft verwenden, daß im Diskontinuitätspunkt  $t_1 = t_{1'}$  von  $\langle \tilde{T}[\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \langle \tilde{T}[\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle - \langle \tilde{T}[\frac{\partial}{\partial t_1} \psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle = \delta(1'-1)$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] i \langle \tilde{T}[\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle &= \delta(1'-1) \\ + \frac{1}{i} i^2 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \langle \tilde{T}[\psi^\dagger(2^-)\psi(2^-)\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle &. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wenn wir nun die Zweiteilchen -Antikausal-Green-Funktion (ZTAKGF) als

$$\tilde{G}_2(12; 1'2') = i^2 \langle \tilde{T}[\psi(1)\psi(2)\psi^\dagger(1')\psi^\dagger(2')] \rangle \quad (3.6)$$

definieren, kann leicht gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{T}[\psi^\dagger(2^-)\psi(2^-)\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle \\ &= \pm \frac{1}{i^2} \tilde{G}_2(12^-; 1'2'^-)|_{t_2=t_1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ist.

Da nach Definition

$$\tilde{G}(1, 1') = i \langle \tilde{T}[\psi(1)\psi^\dagger(1')] \rangle$$

ist, läßt sich schließlich die Gleichung (3.5) als

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] \tilde{G}(1, 1') = \delta(1' - 1) \quad (3.8)$$

$$-i \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tilde{G}_2(12^-; 1'2^-) \Big|_{t_2=t_1}$$

schreiben. Dieser Ausdruck stellt die Bewegungsgleichung für die ETAKGF dar, die für die reellen und die imaginären Zeitargumente gilt, wobei für die komplexe Zeit die  $\oint$ -Funktion für die Integration entlang der imaginären Achse definiert wird.

#### 4. Die Zeitumkehrinvarianz der Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Kausal-Green-Funktion

---

Die Frage, ob die Bewegungsgleichung für die ETKGF gegen Zeitumkehr invariant ist kann leicht bejahend beantwortet werden, wenn man darauf achtet, daß diese Gleichung eigentlich die Schrödingersche Gleichung darstellt, die durch die "Feld- Quantisierung" ausgedrückt wurde. Nachdem die Schrödingersche Gleichung gegen Wigner-Zeitumkehr <sup>9)</sup> <sup>10)</sup> <sup>11)</sup> (Zeitumkehr und Komplex-Konjugation der Gleichung) invariant ist, kann daraus geschlossen werden, daß auch die Bewegungsgleichung für die ETKGF gegen Zeitumkehr invariant ist. Da diese Gleichung die Ausgangsgleichung für die Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung ist, die sich auf irreversible Prozesse bezieht, und da zwischen diesen beiden Gleichungen eine umfangreiche mathematische Herleitung liegt, deren physikaler Inhalt nicht immer offenbar ist, ist es erforderlich, ein klares Kriterium, das der Methode der Green-Funktionen angepaßt ist, zur Feststellung der Zeitumkehrinvarianz zu haben.

Um dieses Kriterium zu finden, klären wir zuerst, was Zeitumkehrinvarianz der Schrödingerschen Gleichung in der Quantenmechanik bedeutet. <sup>9)</sup> <sup>10)</sup> <sup>11)</sup>

Betrachten wir daher die Schrödingersche Gleichung für ein isoliertes System von spinlosen Teilchen:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = H \Psi(q, t) \quad (4.1)$$

Wenn wir auf die Gleichung (4.1) den "Zeitumkehroperator" mit  $t \rightarrow t' = -t$  wirken lassen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t'} \Psi(q, t') = H \Psi(q, t') \quad (4.2)$$

Bildet man den komplex-konjugierten Wert der Gleichung (4.2), so erhält man

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t'} \Psi^*(q, t') = H \Psi^*(q, t')$$

bzw.

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t'} \Psi'(q, t') = H \Psi'(q, t'). \quad (4.3)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (4.1) und (4.3) sieht man, daß sie äquivalent sind, wobei

$$\Psi'(q, t) = \Psi^*(q, t') = \Psi^*(q, -t) \quad (4.4)$$

ist. Somit können wir die Behauptung, daß die Schrödingersche Gleichung gegen Zeitumkehr invariant ist, wie folgt ausdrücken: man erhält die Wellenfunktion  $\Psi'(q, t')$  des Umkehr-Prozesses des Original-Prozesses, indem man den komplex-konjugierten Wert der Original-Wellenfunktion mit  $t' = -t$  bildet.

Ein derart definiertes Kriterium der Zeitumkehrinvarianz in der Methode der Green-Funktion würde folgendermaßen lauten:

Betrachten wir die Bewegungsgleichung für die ETKGF  
(K-B (3-2b)) d.h.:

$$\left[ -i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] G(1,1) = \delta(1-1') \quad (4.5)$$

$$\pm 2 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) G_2(1,2^{++}; 1,2^{--}) \Big|_{t_2=t_1}$$

Wenn man in dieser die Argumente  $1 \leftrightarrow 1'$  vertauscht, ergibt sich:

$$\left[ -i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] G(1',1) = \delta(1'-1) \quad (4.6)$$

$$\pm 2 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) G_2(1',2^{++}; 1,2^{--}) \Big|_{t_2=t_1}$$

Wenn wir den komplexen-konjugierten Wert dieser Gleichung bilden, erhalten wir die Gleichung:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] [G(1',1)]^* = \delta(1'-1) \quad (4.7)$$

$$\mp 2 \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) [G_2(1',2^{++}; 1,2^{--})]^*$$

Wir haben bereits im Kapitel 1 gezeigt, daß:

$$[G(1',1)]^* = \tilde{G}(1,1') \quad (4.8)$$

ist.

Durch Anwendung von den Eigenschaften der Operatoren  $\hat{\tau}$

und  $\tilde{T}$  kann leicht gezeigt werden, daß

$$[G_2(1' 2^{--}; 1 2^-)]^* = \tilde{G}_2(1 2^-; 1' 2^{--}) \quad (4.9)$$

ist.

Einsetzen der Gleichungen (4.8) und (4.9) in die Gleichung (4.7) ergibt die Gleichung:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right] \tilde{G}(1, 1') = \delta(1' - 1) \quad (4.10)$$

$$\mp i \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tilde{G}_2(1 2^-; 1' 2^{--})|_{t_2=t_1}.$$

Die Gleichung (4.10) ist mit der Gleichung (3.8) aus dem vorstehenden Kapitel, d.h. mit der Bewegungsgleichung für die ETAKGF, die mittels Definition der AKGF abgeleitet wurde äquivalent.

Außerdem genügt die AKGF der Gleichung:

$$[G(1', 1)]^* = \tilde{G}(1, 1'). \quad (4.11)$$

Dies läßt sich als

$$[G(\tau)]^* = \tilde{G}(-\tau) \quad (4.12)$$

ausdrücken, worin  $\tau = t_1' - t_1$  ist, weil die KGF und AKGF wegen der Translationsinvarianz des Hamilton-Operators in der Zeit nur von der Differenz der Argumente  $t_1 - t_1'$  abhängen.

Aufgrund vorstehender Darlegung und der Gleichungen (4.10) und (4.12) schließen wir, daß die ETAKGF die "Zeitumkehrlösung" der Bewegungsgleichung für die ETKGF darstellt. Nachdem sich ihre Bewegungsgleichung durch Bildung der komplex-konjugierten Form der Bewegungsgleichung für die ETKGF finden läßt, schließen wir, daß die Bewegungsgleichung für die ETKGF gegen Zeitumkehr invariant ist.

5. Die Definition der Antikausal-Green-Funktion für ein System, auf welches das äußere skalare Potential  $U(\vec{r}, t)$  wirkt
- 

Bevor wir eine solche AKGF definieren, müssen wir bei der von Kadanoff und Baym <sup>27)</sup> angegebenen Definition der KGF für ein System, auf welches das äußere skalare Potential  $U(\vec{r}, t)$  wirkt, ansetzen.

Erörtern wir zunächst die Gründe, die dazu führen, daß Kadanoff und Baym eine solche Green-Funktion definieren.

Die Bewegungsgleichung für die ETKGF ist keine geschlossene Gleichung, weil sie auch die ZTKGF beinhaltet. Die Vielteilchen-Green-Reihe von Gleichungen, die der B-B-K-G-Y - Hierarchie in der klassischen statistischen Physik <sup>3)</sup> ähnelt. Um aus der Bewegungsgleichung für die ETKGF eine geschlossene Gleichung für diese Funktion zu erhalten, ist es erforderlich, die ZTKGF durch die ETKGF auszudrücken.

Dies kann z.B. mittels eines approximativen Ausdrucks geschehen. Aus den angegebenen Gründen ist es nicht möglich, den exakten Ausdruck für die ZTKGF zu finden.

Um die ZTKGF durch die ETKGF auszudrücken, betrachten Kadanoff und Baym ein System in einem äußeren skalaren Feld  $U(\vec{r}, t)$  das sich mit der Zeit ändert. Das äußere Feld kann als eine zeitabhängige Störung betrachtet werden, die auf das im Gleichgewicht befindliche System einzuwirken anfängt. <sup>28)</sup>

Die ETKGF für ein solches System läßt sich in folgender Weise definieren: Wir bezeichnen mit  $H_v$  den vollständigen Hamilton-Operator des Systems, mit  $H(t_0)$  den vollständigen Hamilton-Operator des Systems im Augenblick  $t_0$  vor dem Einschalten des äußeren Feldes und mit  $H^v(t)$  den Term des Hamilton-Operators, der nur vom äußeren Feld  $U(\vec{r}, t)$  stammt, und der mit dem Ausdruck

$$H^v(t) = \int d\vec{r} U(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t) \quad (5.1)$$

gegeben ist. Es gilt dann

$$H_v(t) = H(t_0) + H^v(t) \quad (5.2)$$

Der Zustand des Systems im Schrödinger-Bild ändert sich nach der Schrödingerschen Gleichung, d.h.

$$i \frac{\partial \Psi_s(t)}{\partial t} = [H(t_0) + H^v(t)] \Psi_s(t), \quad k=1. \quad (5.3)$$

Wenn wir das System im Heisenberg-Bild betrachten, ändern sich die Operatoren mit der Zeit gemäß:

$$i \frac{\partial X_v(t)}{\partial t} = [X(t), H(t_0) + H^v(t)]. \quad (5.4)$$

Um die genannte Green-Funktion zu definieren, ist es erforderlich, das System im Wechselwirkungsbild zu betrachten. Wir

wählen dasjenige Wechselwirkungsbild, in welchem der Hamilton-Operator  $H(t_0)$  die Änderung der Operatoren und der Term  $H^v(t)$  die Änderung der Zustände mit der Zeit bestimmt;

i.h.

$$i \frac{\partial X_I(t)}{\partial t} = [X_I(t), H(t_0)] \quad (5.5)$$

und

$$i \frac{\partial \Psi_I(t)}{\partial t} = H^v(t) \Psi_I(t) \quad (5.6)$$

bzw.

$$\Psi_I(t) = e^{iH(t_0)} \Psi_S(t). \quad (5.7)$$

Wir definieren einen Zeitverschiebungsoperator  $\mathcal{V}(t, t_0)$  der die Änderung des Zustandes unter der Einwirkung des äußeren Feldes vom Zeitpunkt  $t_0$  bis zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  beschreibt:

$$\Psi_I(t) = \mathcal{V}(t, t_0) \Psi_I(t_0). \quad (5.8)$$

Nachdem  $\Psi_I(t_0) = \Psi_S(t_0)$  ist, kann leicht gezeigt werden, daß sich der Operator  $\mathcal{V}(t, t_0)$  mit der Zeit nach der Gleichung

$$i \frac{\partial \psi(t, t_0)}{\partial t} = H \psi(t) \psi(t, t_0) \quad (5.9)$$

ändert, deren Lösung, wie bekannt, symbolisch in der Form

$$\psi(t, t_0) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^t dt' d\vec{r} \, n(\vec{r}', t') U(\vec{r}', t') \right] \right\} \quad (5.10)$$

geschrieben werden kann.

Es läßt sich auch beweisen, daß für die Operatoren im Heisenberg-Bild und in obigem Wechselwirkungsbild die Relation

$$X_V(t) = \psi^\dagger(t, t_0) X_I(t) \psi(t, t_0) \quad (5.11)$$

gilt.

Mit <sup>29)</sup> <sup>30)</sup> <sup>13)</sup> nehmen wir an, daß die Dichtematrix  $\rho_I$  im Wechselwirkungsbild sich mit der Zeit nach der Gleichung

$$i \frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = [H \psi(t), \rho_I(t)] \quad (5.12)$$

ändert bzw.

$$\rho_I(t) = \psi(t, t_0) \rho_I(t_0) \psi^\dagger(t, t_0) . \quad (5.13)$$

Wenn wir die Green-Funktion als den Mittelwert von Feldoperatoren im Wechselwirkungsbild definieren möchten, dann müssen wir auch die Dichtematrix als Funktion der Zeit betrachten. 13)

Für komplexe Zeitargumente läßt sich die Green-Funktion auf dem komplexen Segment  $[0, -i\beta]$  für ein System mit äußerem Feld als

$$G(1, 1', U) = -i \frac{\text{tr} \left\{ \mathcal{T} [\psi(1) \psi^\dagger(1') \rho_I(-i\beta)] \right\}}{\text{tr} \left\{ \mathcal{T} [\rho_I(-i\beta)] \right\}} \quad (5.14)$$

definieren. Wenn wir annehmen, daß das System vor dem Einschalten des äußeren Feldes im thermodynamischen Gleichgewicht war, und daß es dort durch die großkanonische Dichtematrix beschrieben werden kann, so ist

$$\begin{aligned} \rho_I(t_0) = \rho_I(0) = \rho_{\text{ex}} &= \frac{e^{-\beta [H(t_0) - \mu N]}}{\text{tr} e^{-\beta [H(t_0) - \mu N]}} \\ &= \frac{e^{-\beta \bar{H}}}{\text{tr} e^{-\beta \bar{H}}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wenn wir voraussetzen könnten, daß sich nicht gemäß (5.13) sondern näherungsweise gemäß der Gleichung

$$\rho_I = \mathcal{U}(t, t_0) \rho_I(t_0) \quad (5.16)$$

bzw. für  $t_0 = 0$

$$g_I(t) = v(t, 0) g_{GK} \quad (5.17)$$

mit der Zeit ändert, so könnten wir wie folgt argumentieren:

Wir wählen im Ausdruck für die Green-Funktion den Wert der Dichtematrix im Endpunkt  $-i\beta$  des Intervalls  $(0, -i\beta)$ , d.h.

$$\begin{aligned} g_I(-i\beta) &= v(-i\beta, 0) g_I(0) \\ &= v(-i\beta, 0) g_{GK} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Einsetzen von (5.18) in (5.14) ergibt

$$G(1, 1'; U) = -i \frac{\text{tr} \{ T [\psi(1) \psi^\dagger(1') v(-i\beta, 0) g_{GK}] \}}{\text{tr} \{ T [v(-i\beta, 0) g_{GK}] \}} \quad (5.19)$$

Wenn wir die zyklische Eigenschaft der Spur verwenden, erhalten wir

$$G(1, 1'; U) = -i \frac{\text{tr} \{ g_{GK} T [v(-i\beta, 0) \psi(1) \psi^\dagger(1')] \}}{\text{tr} \{ g_{GK} T [v(-i\beta, 0)] \}} \quad (5.20)$$

bzw.

$$G(1,1';U) = -i \frac{\langle T [S \psi(1) \psi^*(1')] \rangle}{\langle T [S] \rangle}, \quad (5.21)$$

worin

$$S = \exp \left[ -i \int_0^{-i\beta} d2 \, n(2) U(2) \right] \quad (5.22)$$

ist.

Der Vergleich des Ausdrucks (5.21) mit der Definition K-B (5.1) zeigt, daß beide identisch sind.

Wir haben schließlich alle Elemente, die erforderlich sind, um die Antikausal-Green-Funktion für das System, auf welches das äußere Potential  $U(\vec{r},t)$  wirkt, zu definieren. Bei der Definition dieser Funktion für das System im Gleichgewicht haben wir gesehen, daß sie im Unterschied zur Kausal-Green-Funktion, die auf dem komplexen Zeitsegment  $[0, -i\beta]$  definiert ist, auf dem Segment  $[0, i\beta]$  definiert ist, so daß wir anstelle der Voraussetzung (5.18) die Voraussetzung

$$\tilde{\rho}_I(0) = \tilde{v}(0, i\beta) \rho_I(i\beta) = \tilde{v}(0, i\beta) \rho_{\text{ex}} \quad (5.23)$$

haben. Darin haben wir für den Einschaltmoment des äußeren Feldes den Moment  $t_0 = i\beta$  gewählt, so daß die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild

$$\Psi_U(t) = \tilde{V}^+(t, i\beta) \Psi(t) \tilde{V}(t, i\beta)$$

und

(5.24)

$$\Psi_U^+(t') = \tilde{V}^+(t', i\beta) \Psi^+(t') \tilde{V}(t', i\beta)$$

lauten.

Die Antikausal-Green-Funktion definieren wir nun analog der Definition (5.14) als

$$\tilde{G}(1, 1'; U) = i \frac{\text{tr} \left\{ \tilde{T} [\Psi(1) \Psi^+(1') \tilde{\rho}_I(0)] \right\}}{\text{tr} \left\{ \tilde{T} [\tilde{\rho}_I(0)] \right\}} \quad (5.25)$$

Einsetzen des Ausdrucks (5.23) in den Ausdruck (5.25) ergibt nach der Anwendung der zyklischen Eigenschaften der Spur das Resultat

$$\tilde{G}(1, 1'; U) = i \frac{\langle \tilde{T} [\tilde{S} \Psi(1) \Psi^+(1')] \rangle}{\langle \tilde{T} [\tilde{S}] \rangle} \quad (5.26)$$

worin

$$\tilde{S} = \exp \left[ -i \int_{i\beta}^0 d2 \, U(2) \tilde{n}(2) \right] \quad (5.27)$$

ist.

$\tilde{n}(\vec{r}, t)$  ist der Dichteoperator, der für das zeitumgekehrte System als

$$\tilde{n}(\vec{r}, t) = \Psi^+(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (5.28)$$

definiert wird;  $t^-$  bezeichnet ein Zeitargument, das infinitesimal kleiner als  $t$  ist, so daß im Ausdruck (5.28) zuerst der Operator mit dem größeren Zeitargument  $t$  wirkt. Dieser Ausdruck (5.28) läßt sich gekürzt in der Form

$$\tilde{n}(1) = \psi^+(1^-) \psi(1) \quad (5.29)$$

schreiben.

# 6. Die Ableitung des approximativen Ausdrucks für die Zweiteilchen-Antikausal-Green-Funktion ---

Ähnlich dem im Kapitel 2 geschilderten Verfahren wird die Bewegungsgleichung für die ETAKGF für das System mit äußerem Potential  $U(\vec{r}, t)$  hergeleitet, so daß dies nicht wiederholt wird. Diese Gleichung hat die Form:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{p_1^2}{2m} - U(1) \right] \tilde{G}(1, 1'; U) = \delta(1' - 1) \quad (6.1)$$

$$+ i \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tilde{G}_2(1, 2; 1', 2'; U) \Big|_{t_2=t_1}$$

in der die ZTAKGF als

$$\tilde{G}_2(1, 2, 1', 2'; U) = i^2 \frac{\langle \tilde{T} [\tilde{S} \psi(1) \psi(2) \psi^\dagger(2') \psi^\dagger(1')] \rangle}{\langle \tilde{T} [\tilde{S}] \rangle} \quad (6.2)$$

definiert ist. Um sich in der Gleichung (6.1) von der ZTAKGF zu befreien, verfahren wir auf folgende Weise. 32) 33)

Wir betrachten die Änderung der AKGF, die infolge der infinitesimalen Änderung des äußeren Felds  $U(\vec{r}, t)$  entsteht, d.h.

$$U(2) \rightarrow U(2) + \delta U(2). \quad (6.3)$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \delta \tilde{G}(1,1';V) = & \int_{i\beta}^0 d2 \delta V(2) \frac{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S} \tilde{n}(2) \psi(1) \psi^+(1')] \rangle}{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S}] \rangle} \\ & - \int_{i\beta}^0 d2 \delta V(2) \frac{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S} \tilde{n}(2)] \rangle}{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S}] \rangle} \\ & \times \frac{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S} \psi(1) \psi^+(1')] \rangle}{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S}] \rangle}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

worin  $\tilde{n}(2) = \psi^+(2) \psi(2)$  ist.

Nach der Definition der Funktionen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{G}_2$  folgt

$$\frac{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S} \psi^+(2) \psi(2)] \rangle}{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S}] \rangle} = \pm \frac{1}{i} \tilde{G}^>(2,2^-;V) \quad (6.5)$$

und

$$\frac{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S} \psi(1) \psi^+(1') \tilde{n}(2)] \rangle}{\langle \tilde{\pi}[\tilde{S}] \rangle} = \pm \frac{1}{i^2} \tilde{G}_2^{>}(12^-,1'2^-;V). \quad (6.6)$$

Einsetzen der Ausdrücke (6.5) und (6.6) in die Gleichung (6.4) ergibt das Resultat

$$\delta \tilde{G}(1, 1'; U) = \mp \int_{i\beta}^0 d2 \delta U(2) \left[ \tilde{G}_2(12^-; 1'2^-; U) - \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) \right]. \quad (6.7)$$

Wenn wir im Ausdruck (6.7) die Integrationsgrenzen vertauschen, erhalten wir

$$\delta \tilde{G}(1, 1'; U) = \pm \int_0^{i\beta} d2 \delta U(2) \left[ \tilde{G}_2(12^-; 1'2^-; U) - \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) \right]. \quad (6.8)$$

Bekanntlich stellt der Ausdruck bei  $\delta U(2)$  in der Gleichung (6.8) die Funktionalableitung (oder Variationsableitung) der Funktion  $\tilde{G}(1, 1'; U)$  nach  $U(2)$  dar und wird als  $\delta \tilde{G}(1, 1'; U) / \delta U(2)$  bezeichnet, so daß gilt

$$\frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; U)}{\delta U(2)} = \pm \left[ \tilde{G}_2(12^-; 1'2^-; U) - \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) \right]. \quad (6.9)$$

Wir haben so einen Ausdruck erhalten, durch welchen wir die ZTAKGF mittels der ETAKGF und ihrer Funktionalableitung nach  $U(2)$  als

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(1^-, 1'^-; U) &= \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) \\ &+ \frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; U)}{\delta U(2)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

ausdrücken können.

Einsetzen des Ausdrucks (6.10) anstelle  $\tilde{G}_2$  in die Gleichung (6.1) ergibt das Resultat

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - U(1) \right] \tilde{G}(1, 1'; U) &= \delta(1'-1) \\ &+ i \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \left[ \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) + \frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; U)}{\delta U(2)} \right] \Big|_{t_2=t_1}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Somit stellt Gleichung (6.11) eine Funktional-Differentialgleichung für die AKGF dar.

Die Gleichung (6.11) läßt sich auf folgende Weise in eine Integralgleichung umwandeln. Die ETAKGF für das korrespondierende System freier Teilchen ist durch die Gleichung

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - U(1) \right] \tilde{G}_0(1, 1'; U) = \delta(1'-1) \quad (6.12)$$

mit der Randbedingung

$$\tilde{G}_0(1, 1'; U)|_{t_1=0} = \pm e^{N\beta} \tilde{G}_0(1, 1'; U)|_{t_1=i\beta} \quad (6.13)$$

bestimmt. Wenn wir im Ausdruck (6.11) anstelle der  $\delta$ -Funktion den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (6.12) einsetzen, erhalten wir nach einer längeren Transformation\* folgende Integralbewegungsgleichung für die ETAKGF

$$\begin{aligned} \tilde{G}(1, 1'; U) &= \tilde{G}_0(1, 1'; U) \\ &+ \int_{i\beta}^0 d\bar{1} \int_{i\beta}^0 d\bar{2} \tilde{G}_0(1, \bar{1}; U) V(\bar{1} - \bar{2}) \\ &\times \left[ \tilde{G}(\bar{2}, \bar{2}'; U) \pm \frac{\delta}{\delta U(\bar{2}')} \right] \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U), \end{aligned} \quad (6.14)$$

$t_{\bar{2}} = t_{\bar{1}}$

worin

$$V(\bar{1} - \bar{2}) = V(|\vec{r}_{\bar{1}} - \vec{r}_{\bar{2}}|) \delta(t_{\bar{1}} - t_{\bar{2}})$$

ist.

Durch diese Gleichung und durch die Randbedingung (6.13) können wir leicht zeigen, daß  $\tilde{G}(1, 1'; U)$  der Randbedingung

---

\* Siehe Anhang B

$$\tilde{G}(1,1';V)|_{t_r=0} = \pm e^{i\pi\beta} \tilde{G}(1,1';V)|_{t_r=i\beta} \quad (6.15)$$

genügt.

Die Integralbewegungsgleichungen für die KGF (K-B(5-14)) und für die AKGF (6.14) unterscheiden sich von den entsprechenden Differentialgleichungen (K-B(5-12)) bzw. Gleichung (6.12) dadurch, daß in diesen die explizite Zeitintegration nach dem Segment  $[0, -i\beta]$  für die KGF bzw. nach dem Segment

$[0, i\beta]$  für die AKGF erscheint, die durch die  $\delta$ -Funktion eingeführt ist, die auf dem Segment  $[0, -i\beta]$  bzw.  $[0, i\beta]$  definiert wird.

Aufgrund des im Kapitel 3 gegebenen Kriteriums kann gezeigt werden, daß durch das Umwandlungsverfahren der Differentialgleichung K-B(5-12) in die Integralgleichung K-B(5-14) die Zeitumkehrinvarianz der Gleichung K-B(5-12) nicht beeinträchtigt, womit die Richtigkeit des Verfahrens bestätigt wird. Die Gleichung (6.14) werden wir ausnützen, indem wir in der Differentialbewegungsgleichung für die AKGF (6.1) den Integranden in der Form des Produkts aus  $\sum$ , dem "antikausalen Selbstenergieoperator", und der ETAKGF schreiben.

Eine solche Form der Bewegungsgleichung wird zum Vergleich mit der entsprechenden Bewegungsgleichung für die KGF und zur Gewinnung der Bewegungsgleichung für die AKGF mit reellen Zeitargumenten benötigt.

Kadanoff und Baym haben diese Faktorisierung des Integranden durchgeführt, indem sie den approximativen Ausdruck für die ZTKGF unter Verwendung der Interpretation der Green-Funktionen als Propagatoren <sup>34) 35)</sup> geschrieben haben. Danach haben sie im Kapitel 5 Ref 1 nachträglich gezeigt, daß diese Faktorisierung richtig ausgeführt worden ist. Dieser Beweis ist jedoch nicht explizit gegeben. Wir werden daher hier zeigen, wie man direkt, ohne Darstellung der Funktionen  $\tilde{G}$  und  $\tilde{G}_2$  als Propagatoren die erwähnte Faktorisierung für den Fall der AKGF ausführen kann; und zwar unter Verwendung von Störungstheorie, die der im Kapitel 5 Ref 1 angegeben ähnlich, aber an die AKGF angepaßt ist. Gehen wir von der Differentialbewegungsgleichung für die AKGF (6.1) aus, so können wir mit Hilfe des Ausdrucks (6.10) für  $\tilde{G}_2$  leicht sehen, daß sich

$$\frac{\delta \tilde{G}_0(1,1';U)}{\delta U(2)} = \tilde{G}_0(1,2;U) \tilde{G}_0(2,1';U) \quad (6.16)$$

ergibt. In erster Näherung kann also  $\frac{\delta \tilde{G}(U)}{\delta U}$  als

$$\frac{\delta \tilde{G}(1,1';U)}{\delta U(2)} \approx \tilde{G}(1,2;U) \tilde{G}(2,1';U) \quad (6.17)$$

geschrieben werden. Einsetzen dieser Gleichung in

$$\tilde{G}_2(12^-;1'2^-;U) = \tilde{G}(1,1';U) \tilde{G}(2,2^-;U) \pm \frac{\delta \tilde{G}(1,1';U)}{\delta U(2)}$$

ergibt die Näherung erster Ordnung für  $\tilde{G}_2$  d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(1, 2^-, 1', 2'^-; U) &= \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2^-, 2'^-; U) \\ &\pm \tilde{G}(1, 2'^-; U) \tilde{G}(2^-, 1'; U). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Im Fall  $U = 0$  stellt dies die Hartree-Fock-Näherung für die ZTAKGF dar. Die Näherung zweiter Ordnung für  $\tilde{G}_2$  kann auf folgende Weise gewonnen werden: Im Ausdruck (6.14) setzen wir die Größe  $\delta \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U) / \delta U(\bar{1})$  in der Näherung erster Ordnung d.h.

$$\frac{\delta \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U)}{\delta U(\bar{1})} = \tilde{G}(\bar{1}, \bar{2}^-; U) \tilde{G}(\bar{2}^-, 1'; U) \quad (6.19)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{G}(1, 1'; U) &= \tilde{G}_0(1, 1'; U) \\ &+ i \int_{i\beta}^0 d\bar{1} d\bar{2} \tilde{G}_0(1, \bar{1}; U) V(\bar{1} - \bar{2}) \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\times \left[ \tilde{G}(\bar{2}, \bar{2}^-; U) \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U) \pm \tilde{G}(\bar{1}, \bar{2}^-; U) \tilde{G}(\bar{2}^-, 1'; U) \right] \Big|_{t_F = t_F}$$

so daß sich

$$\frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; U)}{\delta U(2)} = \frac{\delta \tilde{G}_0(1, 1'; U)}{\delta U(2)} - i \int_{i\beta}^0 d\bar{\tau} d\bar{2} \tilde{G}_0(1, \bar{\tau}; U) V(\bar{\tau} - \bar{2}) \quad (6.21)$$

$$\times \left[ \frac{\delta \tilde{G}(\bar{2}, \bar{2}'; U)}{\delta U(2)} \tilde{G}(\bar{\tau}, 1'; U) \pm \frac{\delta \tilde{G}(\bar{\tau}, \bar{2}'; U)}{\delta U(2)} \tilde{G}(\bar{2}, 1'; U) \right] \Big|_{\bar{t}_2 = t_1}$$

ergibt.

Einsetzen des Ausdrucks (6.21) in die Gleichung (6.10) liefert die Näherung zweiter Ordnung für  $\tilde{G}_2$ , nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(1, 2^-, 1' 2'^-; U) &= \tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(2, 2^-; U) \\ &\quad - \int_{i\beta}^0 d\bar{\tau} d\bar{2} V(\bar{\tau} - \bar{2}) \tilde{G}(1, \bar{\tau}; U) \\ &\quad \times \left[ \tilde{G}(\bar{\tau}, 1'; U) \tilde{G}(\bar{2}, 2^-; U) \tilde{G}(2, \bar{2}; U) \right. \\ &\quad \left. \pm \tilde{G}(1, 2^-; U) \tilde{G}(2, \bar{2}; U) \tilde{G}(\bar{2}, 1'; U) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Für den Fall  $U=0$  stellt diese Gleichung die zweite Bornsche Näherung für die ZTAKGF dar.

Wenn man diese Näherung in die Gleichung (6.2) einsetzt, kann nach längerer Ableitung gezeigt werden, daß sie in der Form

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V(1) \right] \tilde{G}(1, 1'; U) + \int_{i\beta}^0 d\bar{1} \tilde{\Sigma}(1, \bar{1}; U) \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U) = \delta(1' - 1) \quad (6.23)$$

geschrieben werden kann.

$\tilde{\Sigma}(1, 1'; U)$  nennen wir "antikausaler Selbstenergieoperator", der aus dem Hartree-Fock-Term, d.h. dem  $\tilde{\Sigma}_{HF}$  und Stoßterm, d.h. dem  $\tilde{\Sigma}_C$ , besteht,

$$\tilde{\Sigma}(1, 1'; U) = \tilde{\Sigma}_{HF}(1, 1'; U) + \tilde{\Sigma}_C(1, 1'; U),$$

wobei gezeigt werden kann, daß

$$\tilde{\Sigma}_{HF}(1, 1'; U) = \pm i \delta(1-1') \int_{i\beta}^0 d\bar{1} V(1-\bar{1}) \tilde{G}(\bar{1}, \bar{1}'; U) \quad (6.24)$$

$$- i V(1-1') \tilde{G}(1, 1'; U),$$

und  $\tilde{\Sigma}_C$  in der zweiten Bornschen Näherung durch den Ausdruck

$$\tilde{\Sigma}_C(1, 1'; U) = \pm i^2 \int_{i\beta}^0 d\bar{1} d\bar{3} V(1-\bar{1}) V(\bar{3}-1') \quad (6.25)$$

$$\times [\tilde{G}(1, 1'; U) \tilde{G}(\bar{3}, \bar{2}'; U) \tilde{G}(\bar{2}, \bar{3}'; U)$$

$$\pm \tilde{G}(1, \bar{3}; U) \tilde{G}(\bar{3}, \bar{2}; U) \tilde{G}(\bar{2}, 1'; U)]$$

gegeben sind.

Das Ergebnis (6.23) stellt eine geschlossene Gleichung für die ETAKGF dar, weil  $\tilde{\Sigma}$  durch die ETAKGF in einer Näherung beliebiger Ordnung ausgedrückt werden kann. Wenn für  $\tilde{\Sigma}_c$  die zweite Bornsche Näherung (Gleichung (6.25)) gewählt wird, kann mittels der Gleichung (6.23) aufgrund des im Kapitel 3 gegebenen Kriteriums gezeigt werden, daß die entsprechende Gleichung für die ETKGF (K-B(4-11)) bzw. (5-22) bzw. (8-16a)) gegen Zeitumkehr invariant ist.

Wir haben bereits in der Einleitung auf die Ähnlichkeit der Methode von Kadanoff und Baym mit derjenigen der klassischen Physik (B-B-K-G-Y-Hierarchie <sup>3)</sup>) hingewiesen, aufgrund deren zu erwarten wäre, daß die Bewegungsgleichung für die Green-Funktion nichtumkehrinvariant nach Einsetzen des approximativen Ausdrucks für die ZTKGF wird. Diese Ähnlichkeit ist aber nur scheinbar, weil in der klassischen Ableitung der kinetischen Gleichung der Zusammenstoß zweier Teilchen als ein Prozeß betrachtet wird, der eine bestimmte, obwohl sehr kurze Zeit dauert, so daß es sinnvoll erscheint, die Paar-Verteilungsfunktion vor, während, und nach dem Stoß zu betrachten.

In der Methode der Green-Funktionen macht man bei der Ableitung des Ausdrucks für die ZTKGF auf die im Kapitel 5 Ref 1 gegebene Weise keinen Unterschied zwischen der ZTKGF vor und nach dem Stoß, was bedeutet, daß hier von der Hypothese eines "molekularen Chaos" im klassischen Sinne <sup>4)</sup> <sup>5)</sup> nicht gesprochen werden kann.

## 7. Die analytische Fortsetzung der Komplex-Zeit-Kausal- Green-Funktion für reelle Zeitargumente

---

Kadanoff und Baym haben die geschlossene Bewegungsgleichung für die ETKGF (K-B(8-16a)) erhalten, indem sie Störungstheorie verwendet haben, <sup>32)</sup> sowie anhand der Tatsache, daß die ETKGF und die ZTKGF bestimmte Grenzbedingungen in den komplexen Zeitargumenten genügen. <sup>15)</sup> <sup>28)</sup>

Um aus dieser Gleichung die geschlossene Gleichung für die ETKGF für reelle Zeitargumente zu erhalten (die nicht direkt zu gewinnen ist, weil die ZTKGF für die reellen Zeitargumente komplizierten Grenzbedingungen genügen), haben Kadanoff und Baym durch Anwendung der Methode der analytischen Fortsetzung <sup>6)</sup> gezeigt, daß eine eindeutige Relation zwischen der KGF und der KgF besteht. Danach haben sie mittels geeigneter Deformation des Integrationsweges in der Gleichung K-B(8-16a) nachgewiesen, daß die Bewegungsgleichung für die KGF in eine approximative Bewegungsgleichung für die KgF transformiert werden kann. Dieses Verfahren ist jedoch bei Kadanoff und Baym ziemlich formal dargestellt. Detailliertere Erläuterungen des Verfahrens finden sich später bei C. Horie <sup>7)</sup> und R.A. Craig. <sup>8)</sup> Diese sind aber mehr verbaler Natur.

Dieser Punkt ist der entscheidende Schritt in der Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung, weil, wie wir später sehen werden, in ihm die physikalische Annahme enthalten ist, die zur Zeitumkehrnichtinvarianz dieser Gleichung führt. Aus diesem Grunde erachten wir es als erforderlich, sich mit den Einzelheiten dieses Schrittes näher zu beschäftigen.

Wir werden zuerst zeigen, daß die Green-Funktion für die reellen positiven Zeitargumente die analytische Fortsetzung der Green-Funktion für die negativen imaginären Zeitargumente ist.

Die KGF für das System im äußeren Feld  $V(\vec{r}, t)$  wird auf dem komplexen Segment  $[t_0, t_0 - i\beta]$  als

$$G(1, 1'; V; t_0) = \frac{1}{i} \frac{\langle T[S \psi(1) \psi^+(1')] \rangle}{\langle T[S] \rangle} \quad (7.1)$$

definiert, worin

$$S = \psi(t_0 - i\beta, t_0) \\ = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} dz V(z) R(z) \right] \right\} \quad (7.2)$$

ist. Die Zeitintegration erfolgt also längs des Weges  $C_0$ , wie auf Bild 3 gezeigt ist.

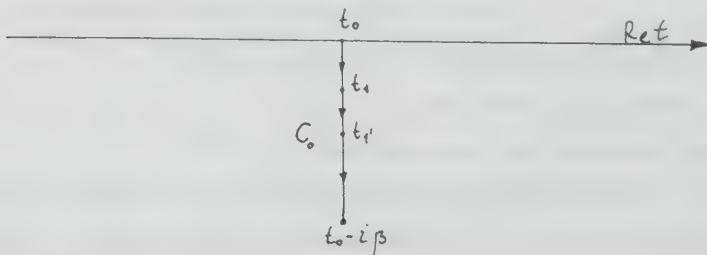


Bild 3

Nehmen wir an, daß  $|Im t_1| < |Im t_1'|$  ist, so läßt sich der Ausdruck (7.1) als

$$G^<(1,1',V,t_0) = \frac{+1}{2} \frac{\langle V(t_0-i\beta, t_1') \psi^\dagger(t_1) V(t_1', t_1) \psi(t_1) V(t_1, t_0) \rangle}{\langle V(t_0-i\beta, t_0) \rangle} \quad (7.3)$$

schreiben, wobei

$$V(t_1, t_0) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0}^{t_1} dz V(z) n(z) \right] \right\}, \quad (7.4)$$

$$V(t_1', t_1) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1}^{t_1'} dz V(z) n(z) \right] \right\} \quad (7.5)$$

und

$$V(t_0-i\beta, t_1') = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1'}^{t_0-i\beta} dz V(z) n(z) \right] \right\} \quad (7.6)$$

ist.

Die ETGF für die reellen Zeitargumente für das System im äußeren Feld wird durch die Gleichung K-2/2-10), d.h. durch

$$g(1, 1'; \nu) = \frac{1}{2} \langle T[\psi_\nu(1) \psi_\nu^\dagger(1')] \rangle \quad (7.7)$$

definiert.

Die Feldoperatoren  $\psi_\nu(1)$  und  $\psi_\nu^\dagger(1')$  stellen die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild dar, das im Kapitel 5 beschrieben wurde, d.h.

$$\begin{aligned} \psi_\nu(t_1) &= \nu^\dagger(t_1, t_0) \psi(t_1) \nu(t_1, t_0), \\ \psi_\nu^\dagger(t_1) &= \nu^\dagger(t_1, t_0) \psi^\dagger(t_1) \nu(t_1, t_0), \end{aligned} \quad (7.8)$$

worin  $t_1$  und  $t_1'$  die reellen Zeitargumente sind und  $t_0$  das Moment des Einschaltens des äußeren Feldes ist. Kadanoff und Baym haben angenommen, daß sich das System vor dem Einschalten des äußeren Feldes im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und daß  $t_0$  ein Zeitpunkt ist, der gegen das Betrachtungsmoment des Systems in die ferne Vergangenheit verschoben ist, was als

$$t_0 = -\infty \quad \text{ausgedrückt werden kann.}$$

Das System also, dessen Verhalten durch die mit der Definition (7.7) gegebene Green-Funktion beschrieben ist, soll der Grenzbedingung genügen, daß es sich im Einschaltmoment des äußeren Feldes  $t_0 = -\infty$  im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Das äußere Feld soll der Bedingung

$$\lim_{\text{Re } t \rightarrow -\infty} V(t) = 0 \quad (7.9)$$

genügen. Die Feldoperatoren, die der vorstehenden Grenzbedingung genügen, haben die Form:

$$\psi(t_1) = v^+(t_1, -\infty) \psi(t_1) v(t_1, -\infty), \quad (7.10)$$

$$\psi^+(t_1') = v^+(t_1', -\infty) \psi^+(t_1') v(t_1', -\infty)$$

und die entsprechende Green-Funktion für den Fall

$t_1 < t_1'$  hat die Form:

$$g^<(1, 1'; V) = \pm \frac{1}{i} \langle v(-\infty, t_1') \psi^+(t_1') \times v(t_1', t_1) \psi(t_1) v(t_1, -\infty) \rangle, \quad (7.11)$$

worin

$$v(-\infty, t_1') = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1'}^{-\infty} dz V(z) n(z) \right] \right\}, \quad (7.12)$$

$$v(t_1', t_1) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1}^{t_1'} dz V(z) n(z) \right] \right\} \quad (7.13)$$

und

$$v(t_1, -\infty) = T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-\infty}^{t_1} dz V(z) n(z) \right] \right\} \quad (7.14)$$

ist.

Um den Übergang von den komplexen zu den reellen Zeitargumenten durchzuführen, ist es erforderlich, den Integrationsweg  $C_0$  (Bild 3) so zu deformieren, daß die Punkte  $t_1$  und  $t_1'$  auf der reellen Achse liegen. Bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes kann die Integration längs  $C_0$  durch die Integration längs desjenigen Weges ersetzt werden, der bei  $t_0 > 0$  auf der reellen Achse anfängt, zum größeren Zeitargument führt (für den Fall  $t_1 < t_1'$   $t_1'$ ), danach längs des Wegstückes, das auf dem infinitesimalen Abstand  $\epsilon$  zur reellen Achse liegt, zum Punkt  $t_0 - i\epsilon$  zurückkehrt, und sich nach der imaginären Achse bis zum Punkt  $t_0 - i\beta$  fortsetzt (Bild 4). Wenn das äußere Feld  $U(\vec{r}, t)$  eine analytische Funktion der Zeit ist, so sind auch die Zeitverschiebungsoperatoren  $\mathcal{V}$  analytische Funktionen der Zeit.

Wendet man die Gruppeneigenschaft dieser Operatoren und den Integrationsweg von Bild 4 an, so kann der Operator

$$\mathcal{V}(t_0 - i\beta, t_0) \quad \text{als}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t_0 - i\beta, t_0) &= \mathcal{V}(t_0 - i\beta, t_0 - i\epsilon) \mathcal{V}(t_0 - i\epsilon, t_1) \\ &\quad \times \mathcal{V}(t_1', t_1) \mathcal{V}(t_1, t_0) \end{aligned} \quad (7.15)$$

ausgedrückt werden

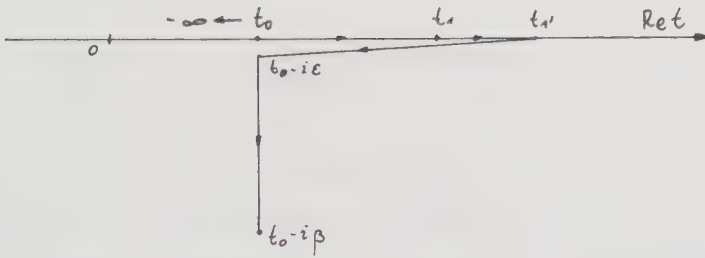


Bild 4

Wenn man nun die erwähnte Grenzbedingung anwendet, wonach das äußere Feld im Limes  $t_0 = -\infty$  eingeschaltet wurde, d.h. wenn man im Ausdruck (7.15) den Grenzübergang  $t_0 = -\infty$  durchführt, erhält man für  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\beta, t_0) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\beta, t_0 - i\epsilon) \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\epsilon, t_1) \\ &\quad \times \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_1', t_1) \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_1, t_0) . \end{aligned} \quad (7.16)$$

Aus dem so dargestellten Ausdruck für  $v(t_0 - i\beta, t_0)$  ist leicht ersichtlich, welche Approximation Kadanoff und Baym vornehmen mußten, um zu erhalten, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\beta, t_0) = 1 \quad (7.17)$$

ist, wodurch die genannten Autoren dann die Möglichkeit hatten, die Relation zwischen der KGF und der KgF zu finden.

Damit die Gleichung (7.17) gelten kann, ist es erforderlich vorzusetzen, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \psi(t_0 - i\beta, t_0 - i\varepsilon) \approx 1 \quad (7.18)$$

ist.

Zum Verständnis des physikalischen Inhalts dieser Approximation betrachten wir die Änderung des Zustandes, auf welchen der Operator (7.18) wirkt. Wenn auf das System, das sich im Einschaltlimes des äußeren Feldes  $t_0 = -\infty$  im thermodynamischen Gleichgewicht befunden hatte, dieser Operator wirkt, wird er die gesamte Änderung des Zustandes in demjenigen Zeitintervall beschreiben, das auf Bild 4 gezeigt ist.

Da das Intervall  $(t_0 - i\varepsilon, t_0 - i\beta)$  für den Fall  $t_0 \rightarrow -\infty$  sehr klein gegen das ganze Intervall wird, kann die Änderung des Zustandes während dieses Teiles im Vergleich zur gesamten Änderung vernachlässigt werden.

Wenn andererseits für  $t_0 \rightarrow -\infty$  der Punkt  $t_0 - i\varepsilon$  nach  $-\infty$  verschoben wird, und wenn in diesem Zeitbereich das äußere Feld adiabatisch abgeschaltet wird, dann kann approximativ angenommen werden, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \psi(t_0 - i\beta, t_0 - i\varepsilon) \approx 1 \quad (7.18)$$

ist.

Es ist offenbar, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \psi(t_0 - i\varepsilon, t_1) = \psi(-\infty, t_1) \quad (7.19)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(t_1, t_0) = \mathcal{V}(t_1, -\infty) \quad (7.20)$$

und

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(t_1, t_0) = \mathcal{V}(t_1, -\infty) \quad (7.21)$$

ist, worin  $t_1$  und  $t_1'$  auf den rechten Seiten der Gleichungen reell sind.

Einsetzen der Gleichungen (7.18), (7.19), (7.20) und (7.21) in den Ausdruck (7.16) ergibt das Resultat

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(t_0 - i\beta, t_0) = 1 \cdot \mathcal{V}(-\infty, t_1') \quad (7.22)$$

$$\times \mathcal{V}(t_1', t_1) \mathcal{V}(t_1, -\infty).$$

Unter Anwendung der Gruppeneigenschaft der Operatoren  $\mathcal{V}$  ergibt sich schließlich

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(t_0 - i\beta, t_0) = \mathcal{V}(-\infty, t_1') \mathcal{V}(t_1', -\infty) \quad (7.23)$$

$$= \mathcal{V}^\dagger(t_1', -\infty) \mathcal{V}(t_1', -\infty) = 1.$$

Aus den Gleichungen (7.18) und (7.19) folgt, daß

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\beta, t_1) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\beta, t_0 - i\epsilon) \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t_0 - i\epsilon, t_1) \\ &= v(-\infty, t_1) \end{aligned} \quad (7.24)$$

ist.

Es kann schließlich mittels der Gleichungen (7.3), (7.20), (7.21), (7.23) und (7.24) gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} G^<(1, 1'; v; t_0) &= \pm \frac{1}{i} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \frac{\langle v(t_0 - i\beta, t_1) \psi^\dagger(t_1) v(t_1, t_1) \psi(t_1) v(t_1, t_0) \rangle}{\langle v(t_0 - i\beta, t_0) \rangle} \\ &= \pm \frac{1}{i} \langle v(-\infty, t_1) \psi^\dagger(t_1) v(t_1, t_1) \psi(t_1) v(t_1, -\infty) \rangle \end{aligned} \quad (7.25)$$

ist.

Vergleicht man den Ausdruck (7.11) mit dem Ausdruck (7.25), so sieht man, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} G^<(1, 1'; v; t_0) = g^<(1, 1'; v) \quad (7.26)$$

ist.

Es ergibt sich in ähnlicher Weise, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} G^{\gamma}(1, 1'; V; t_0) = g^{\gamma}(1, 1'; V) \quad (7.27)$$

ist.

Wir haben also damit gezeigt, daß die Green-Funktion für die positiven reellen Zeitargumente die analytische Fortsetzung der Green-Funktion für die negativen imaginären Zeitargumente ist.

Die Bewegungsgleichung für die KGF, falls in dem Hartree-Fock-Term des Selbstenergieoperators den Austauschterm vernachlässigt wird, hat die Form:

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V_{\text{eff}}(1, t_0) \right] G(1, 1'; V; t_0) \\ &= \delta(1-1') + \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} d\bar{t} \Sigma_c(1, \bar{t}; V; t_0) G(\bar{t}, 1'; V; t_0), \end{aligned} \quad (7.28)$$

worin

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\vec{r}, t; t_0) &= V(\vec{r}, t) \\ &+ i \int d\vec{r}' V(\vec{r} - \vec{r}') G^<(\vec{r}, t, \vec{r}', t'; t_0) \end{aligned} \quad (7.29)$$

ist.

Wir nehmen an, daß  $i(t_1 - t_0) < i(t_1' - t_0)$  ist, und suchen

den Grenzwert der obigen Bewegungsgleichung für den Fall

$$t_0 \rightarrow -\infty, \text{ d.h.}$$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V_{\text{eff}}(1, t_0) \right] \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} G^<(1, 1'; V; t_0)$$

(7.30)

$$= \delta(1-1') + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} d\bar{t} \Sigma_c(1, \bar{t}; V; t_0) G(\bar{t}, 1'; V; t_0).$$

Wenn das Potential  $V(\vec{r}, t)$  eine analytische Funktion der Zeit ist, dann gilt

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V_{\text{eff}}(1, t_0) = U_{\text{eff}}(\vec{r}_1, t_1; -\infty)$$

$$= V(\vec{r}_1, t_1)$$

(7.31)

$$\pm i \int d\vec{r}' v(|\vec{r}_1 - \vec{r}'|) g^<(1, 1'; V)$$

$$= U_{\text{eff}}(\vec{r}_1, t_1),$$

worin  $t_1$  reell ist.

Wenn man den Integrationsweg  $C_0$  von Bild 3 durch den Integrationsweg von Bild 4 ersetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{t_0 - i\beta} d\bar{t} \, \Sigma_c^>(1, \bar{t}; V; t_0) G(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^{t_1} d\bar{t} \, \Sigma_c^>(1, \bar{t}; V; t_0) G^<(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & \quad + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{t_1} d\bar{t} \, \Sigma_c^<(1, \bar{t}; V; t_0) G^<(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & \quad + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{t_0 - i\varepsilon} d\bar{t} \, \Sigma_c^<(1, \bar{t}; V; t_0) G^>(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & \quad + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0 - i\varepsilon}^{t_0 - i\beta} d\bar{t} \, \Sigma_c^<(1, \bar{t}; V; t_0) G^>(\bar{t}, 1'; V; t_0).
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

Da die Funktionen unter dem Integralzeichen im letzten Term des obigen Ausdruckes Funktionen der großen Zeitintervalle

$t_1 - t_{\bar{t}}$  und  $t_{\bar{t}} - t_1$  sind und nachdem bekannt ist, daß die KGF für große Zeitintervalle verschwindet, <sup>35)</sup> kann man annehmen, daß gilt:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0 - i\varepsilon}^{t_0 - i\beta} d\bar{t} \, \Sigma_c^<(1, \bar{t}; V; t_0) G^>(\bar{t}, 1'; V; t_0) = 0. \tag{7.33}$$

Durch die Einführung dieser Approximation befreit man sich vom komplexen Teil des Integrationsweges, und die Integration wird auf die Integration über die reellen Zeitargumente zurückgeführt, die die Transformation der Gleichung (7.28) in die Gleichung für die Reell-Zeit-Green-Funktion ermöglicht. Es kann leicht gezeigt werden, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Sigma_c^>(1, 1'; U; t_0) = \Sigma_c^>(1, 1'; U), \quad (7.34)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Sigma_c^<(1, 1'; U; t_0) = \Sigma_c^<(1, 1'; U)$$

ist, worin  $\Sigma_c^>(1, 1'; U)$  Funktionen der reellen Zeitargumente  $t_1$  und  $t_1'$  sind.

Aufgrund der Gleichungen (7.26), (7.27), (7.31), (7.32), (7.33) und (7.34) aus der Gleichung (7.30) ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - U_{\text{eff}}(1) \right] g^<(1, 1'; U) \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ \Sigma^>(1, \bar{t}; U) - \Sigma^<(1, \bar{t}; U) \right] g^<(\bar{t}, 1'; U) \\ & - \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} \Sigma^<(1, \bar{t}; U) \left[ g^>(\bar{t}, 1'; U) - g^<(\bar{t}, 1'; U) \right]. \end{aligned} \quad (7.35)$$

(Den Index C haben wir der Kürze wegen weggelassen).

Anhand des obigen Verfahrens ist gezeigt worden, wie man die Bewegungsgleichung für die  $KgF$  erhält, die die Ausgangsgleichung für die Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung darstellt.

Es ist aber die Ableitung als solche für uns von keinerlei Interesse, sondern nur die Annahme, durch welche die Nichtumkehrinvarianz der Gleichung K-B(9-30) zustande kommt. Wir haben gezeigt, daß alle Formen der Bewegungsgleichung für die  $KGF$  im komplexen Zeitbereich die T-Invarianz der Ausgangsgleichung behalten haben.

Daher ist es erforderlich, herauszufinden, ob man durch das Verfahren der analytischen Fortsetzung die T-Invarianz der geschlossenen Bewegungsgleichung für die  $ETKgF$  bewahrt, bzw. ob die Gleichung (7.35) dem Kriterium der T-Invarianz, das im Kapitel 4 definiert wurde, genügt.

Um dies festzustellen, ist es nötig, die Bewegungsgleichung für die  $AKgF$  zu finden. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß sie auch durch die Methode der analytischen Fortsetzung aus der Gleichung für die  $AKGF$  gefunden werden kann.

# 8. Die analytische Fortsetzung der Komplex-Zeit-Antikausal-Green-Funktion für reelle Zeitargumente

Wir zeigen jetzt, daß die AKGF für negativ reelle Zeitargumente eine analytische Fortsetzung der Funktion für positiv imaginäre Zeitargumente ist.

Die AKGF für das System im äußeren Feld wird als

$$\tilde{G}(1,1';U;t_0) = i \frac{\langle \tilde{T} [\tilde{S} \psi(1) \psi^+(1')] \rangle}{\langle \tilde{T} [\tilde{S}] \rangle} \quad (8.1)$$

definiert, worin

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= U(t_0, t_0 + i\beta) \\ &= \tilde{T} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0 + i\beta}^{t_0} d2 U(2) \tilde{n}(2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

ist. Die Zeitintegration im Ausdruck (8.2) erfolgt längs des Weges, wie auf Bild 5 dargestellt.

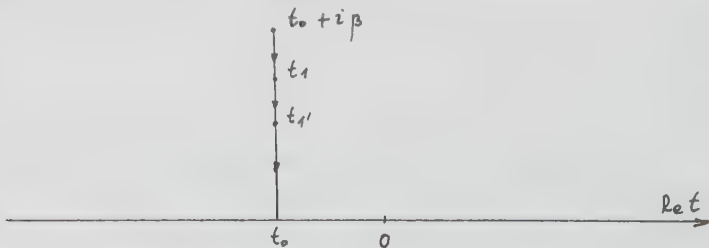


Bild 5

Für den Fall  $\text{Im } t_1 > \text{Im } t_1'$  erhält man aus (8.1)

$$\tilde{G}(1, 1'; U; t_0) = \pm i \frac{\langle \tilde{v}(t_0, t_1) \psi^\dagger(t_1') \tilde{v}(t_1', t_1) \psi(t_1) \tilde{v}(t_1, t_0 + i\beta) \rangle}{\langle v(t_0, t_0 + i\beta) \rangle}, \quad (8.3)$$

worin

$$\tilde{v}(t_1, t_0 + i\beta) = \tilde{\Pi} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_0 + i\beta}^{t_1} d2 \, U(2) \tilde{n}(2) \right] \right\}, \quad (8.4)$$

$$\tilde{v}(t_1', t_1) = \tilde{\Pi} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1}^{t_1'} d2 \, U(2) \tilde{n}(2) \right] \right\} \quad (8.5)$$

und

$$\tilde{v}(t_1', t_0) = \tilde{\Pi} \left\{ \exp \left[ -i \int_{t_1'}^{t_0} d2 \, U(2) \tilde{n}(2) \right] \right\} \quad (8.6)$$

ist.

Die ACgF für reelle Zeitargumente für das System mit äußerem Feld  $U(\vec{r}, t)$  wird als

$$\tilde{g}(1, 1'; U) = i \langle \tilde{\Pi} [\psi_v(1) \psi_v^\dagger(1')] \rangle \quad (8.7)$$

definiert, wobei die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild (Kapitel 5) als

$$\begin{aligned}\psi_U(t_1) &= U^\dagger(t_1, t_0) \psi(t_1) U(t_1, t_0), \\ \psi_U^\dagger(t_1) &= U^\dagger(t_1, t_0) \psi^\dagger(t_1) U(t_1, t_0)\end{aligned}\quad (8.8)$$

definiert sind;  $t_0$  ist der Einschaltmoment des äußeren Feldes. Wir nehmen an, daß sich das betrachtete System in ferner Zukunft im Zustand des thermodynamischen Gleichgewichtes befindet.

Dies bedeutet, daß die Änderung des Systems in dem gegebenen Moment durch die Wirkung des äußeren Feldes  $U(\vec{r}, t)$ , das im Limes  $t_0 = +\infty$  eingeschaltet wurde, verursacht ist. Durch obige Annahme läßt sich (8.8) als

$$\begin{aligned}\psi_U(t_1) &= \tilde{U}^\dagger(t_1, \infty) \psi(t_1) \tilde{U}(t_1, \infty), \\ \psi_U^\dagger(t_1) &= \tilde{U}^\dagger(t_1, \infty) \psi^\dagger(t_1) \tilde{U}(t_1, \infty)\end{aligned}\quad (8.9)$$

schreiben, worin die Schlange über den Zeitverschiebungsoperatoren deutet, daß diese Operatoren in Richtung der negativen Zeitachse wirken.

Für den Fall  $\text{Im } t_1 > \text{Im } t_1'$  ergibt sich durch Einsetzen der Ausdrücke (8.9) in die Definition (8.7)

$$\tilde{g}(t_1, t_1'; U) = \pm i < \tilde{U}(\infty, t_1) \psi^\dagger(t_1') \tilde{U}(t_1', t_1) \psi(t_1) \tilde{U}(t_1, \infty) > . \quad (8.10)$$

Um die analytische Fortsetzung zu reellen Zeiten vorzunehmen; ist es erforderlich, den auf Bild 5 dargestellten Integrationsweg so zu deformieren, daß die Argumente  $t_1$  und  $t_1'$  längs der negativen reellen Achse liegen, unter Beibehaltung der Reihenfolge, die auf dem ursprünglichen Integrationsweg vorhanden war (Bild 6).

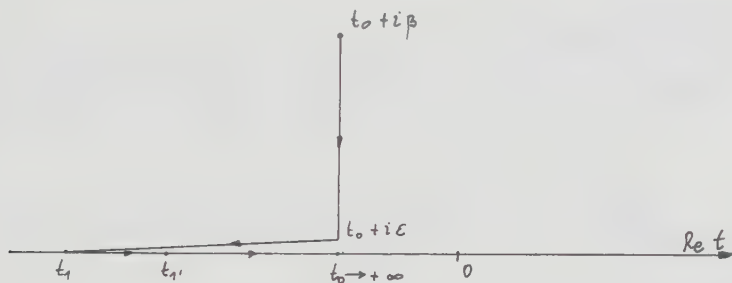


Bild 6

Unter Verwendung der Gruppeneigenschaft der  $\mathcal{V}$  Operatoren kann der Operator  $\tilde{\mathcal{V}}(t_0, t_0 + i\beta)$  durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}(t_0, t_0 + i\beta) &= \tilde{\mathcal{V}}(t_0, t_1') \tilde{\mathcal{V}}(t_1', t_1) \\ &\quad \times \tilde{\mathcal{V}}(t_1, t_0 + i\epsilon) \tilde{\mathcal{V}}(t_0 + i\epsilon, t_0 + i\beta) \end{aligned} \quad (8.11)$$

ausgedrückt werden.

Für den Fall  $t_0 \rightarrow +\infty$  läßt sich (8.11) als

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0, t_0 + i\beta) = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0, t_1) \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_1) \quad (8.12)$$

$$\times \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_0 + i\varepsilon) \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0 + i\varepsilon, t_0 + i\beta)$$

schreiben.

Aus den gleichen Gründen, die im vorangegangenen Kapitel aufgeführt wurden, kann approximativ angenommen werden, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0 + i\varepsilon, t_0 + i\beta) \approx 1 \quad (8.13)$$

ist. Es ist offensichtlich, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0, t_1) = \tilde{v}(+\infty, t_1), \quad (8.14)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_1) = \tilde{v}(t_1, t_1), \quad (8.15)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_0 + i\varepsilon) = \tilde{v}(t_1, +\infty), \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_0 + i\beta) \\
 &= \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_1, t_0 + i\varepsilon) \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0 + i\varepsilon, t_0 + i\beta) \quad (8.17) \\
 &= \tilde{v}(t_1, +\infty)
 \end{aligned}$$

gilt, worin  $t_1$  und  $t_1'$  auf den rechten Seiten der Gleichungen reell sind. Einsetzen der Gleichungen (8.13), (8.14), (8.15) und (8.16) in den Ausdruck (8.12) ergibt das Resultat:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{v}(t_0, t_0 + i\beta) &= \tilde{v}(+\infty, t_1') \tilde{v}(t_1', +\infty) \quad (8.18) \\
 &= \tilde{v}(+\infty, +\infty) = 1.
 \end{aligned}$$

Es kann schließlich mittels der Gleichungen (8.3), (8.10), (8.13), (8.14), (8.15), (8.16), (8.17) und (8.18) gezeigt werden, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{G}^{\rightarrow}(1, 1'; v; t_0) = \tilde{g}^{\rightarrow}(1, 1'; v) \quad (8.19)$$

und

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{G}^{\leftarrow}(1, 1'; v; t_0) = \tilde{g}^{\leftarrow}(1, 1'; v) \quad (8.20)$$

ist. Hiermit haben wir gezeigt, daß eine eindeutige Relation

zwischen der AKGF und der AKgF besteht.

Für die Bewegungsgleichung der AKGF, die auf dem komplexen Segment  $[t_0, t_0 + i\beta]$  definiert wird, Gleichung (6.25), erhält man für den Fall, daß man im Hartree-Fock-Term des Selbstenergieoperators den Austauschterm vernachlässigt,

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - \tilde{U}_{\text{eff}}(1, t_0) \right] \tilde{G}(1, 1'; U; t_0) = \delta(1' - 1) - \int_{t_0 + i\beta}^{t_0} d\bar{1} \tilde{\Sigma}_c(1, \bar{1}; U; t_0) \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U; t_0), \quad (8.21)$$

wobei

$$\tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{r}, t; t_0) = U(\vec{r}, t) + i \int d\vec{r}' V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \tilde{G}^>(\vec{r}, t, \vec{r}', t'; U; t_0)$$

ist.

Wir suchen nun den Grenzwert der Gleichung (8.21) für den Fall  $t_0 \rightarrow +\infty$ :

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{U}_{\text{eff}}(1, t_0) \right] \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{G}(1, 1'; U; t_0) = \delta(1' - 1) - \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_0 + i\beta}^{t_0} d\bar{1} \tilde{\Sigma}_c(1, \bar{1}; U; t_0) \tilde{G}(\bar{1}, 1'; U; t_0). \quad (8.22)$$

Wenn  $U(\vec{r}, t)$  eine analytische Funktion der Zeit ist, dann ergibt sich

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{U}_{\text{eff}}(1, t_0) = U(\vec{r}_1, t_1) \quad (8.23)$$

$$\mp i \int d\vec{r}_1' V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_1'|) \tilde{G}^>(1, 1'; U) = \tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{r}_1, t_1) \\ = \tilde{U}_{\text{eff}}(1),$$

worin  $t_1$  auf der rechten Seite der Gleichung reell ist.

Wenn in der Gleichung (8.22) der Integrationsweg von Bild 5 durch denjenigen von Bild 6 ersetzt wird, erhält man für den Fall  $|t_1| > |t_1'|$  die Gleichung

$$\begin{aligned} & \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_0 + i\epsilon}^{t_0} d\bar{t} \tilde{\Sigma}(1, \bar{t}; U; t_0) \tilde{G}(1, \bar{t}; U; t_0) \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_0 + i\epsilon}^{t_0 + i\epsilon} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^<(1, \bar{t}; U; t_0) \tilde{G}^>(\bar{t}, 1'; U; t_0) \\ &+ \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_0 + i\epsilon}^{t_1} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^<(1, \bar{t}; U; t_0) \tilde{G}^>(\bar{t}, 1'; U; t_0) \\ &+ \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; U; t_0) \tilde{G}^>(\bar{t}, 1'; U; t_0) \quad (8.24) \\ &+ \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_1'}^{t_0} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; U; t_0) \tilde{G}^<(\bar{t}, 1'; U; t_0). \end{aligned}$$

Aus den gleichen Gründen wie im Fall der KGF kann man approximativ annehmen, daß

$$\lim_{\substack{t_0 \rightarrow +\infty \\ t_0 + i\beta}} \int_{t_0 + i\varepsilon}^{t_0 + i\pi} d\bar{t} \tilde{\Sigma}(\bar{t}, \bar{t}; V; t_0) \tilde{G}(\bar{t}, \bar{t}'; V; t_0) \approx 0 \quad (8.25)$$

ist.

Es kann leicht gezeigt werden, daß

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{\Sigma}^>(\bar{t}, \bar{t}'; V; t_0) = \tilde{\Sigma}^>(\bar{t}, \bar{t}'; V),$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \tilde{\Sigma}^<(\bar{t}, \bar{t}'; V; t_0) = \tilde{\Sigma}^<(\bar{t}, \bar{t}'; V) \quad (8.26)$$

gilt, worin  $\tilde{\Sigma}^{\geq}(\bar{t}, \bar{t}'; V)$  eine Funktion der reellen Zeitargumente ist.

Aus den Gleichungen (8.19), (8.20) und (8.26) folgt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_0 + i\epsilon}^{t_1} d\bar{t} \tilde{\Xi}^<(1, \bar{t}; V; t_0) \tilde{G}^>(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & = \int_{\infty}^{t_1} d\bar{t} \tilde{\Xi}^<(1, \bar{t}; V) \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; V) ,
 \end{aligned}
 \tag{8.27}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Xi}^>(1, \bar{t}; V; t_0) \tilde{G}^>(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & = \int_{t_1}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Xi}^>(1, \bar{t}; V) \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; V)
 \end{aligned}
 \tag{8.28}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{t_1}^{t_0} d\bar{t} \tilde{\Xi}^>(1, \bar{t}; V; t_0) \tilde{G}^<(\bar{t}, 1'; V; t_0) \\
 & = \int_{t_1}^{t_0} d\bar{t} \tilde{\Xi}^>(1, \bar{t}; V) \tilde{g}^<(\bar{t}, 1'; V)
 \end{aligned}
 \tag{8.29}$$

ist. Einsetzen der Gleichungen (8.19), (8.23), (8.25), (8.27), (8.28) und (8.29) in Gleichung (8.21) ergibt das Resultat

$$\begin{aligned}
 & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - \tilde{U}_{eff}(1) \right] \tilde{g}^>(1, 1'; v) \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{1}; v) - \tilde{\Sigma}^<(1, \bar{1}; v) \right] \tilde{g}^>(\bar{1}, 1'; v) \\
 & \quad - \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{1}; v) \left[ \tilde{g}^>(\bar{1}, 1'; v) - \tilde{g}^<(\bar{1}, 1'; v) \right].
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Diese Gleichung stellt eine geschlossene Bewegungsgleichung für die ETAKgF dar, weil die Selbstenergieoperatoren  $\tilde{\Sigma}^>$ , wie im Kapitel 6 gezeigt wurde, durch die Funktionen  $\tilde{g}^>$  ausgedrückt werden können.

Nachdem wir Gleichung (8.30) kennen, können wir die Frage beantworten, ob die Gleichung K-B(8-27a) bzw. (8-27b) zeitumkehrinvariant ist oder nicht.

Die Antwort auf diese Frage werden wir im nächsten Kapitel geben.

9. Beweis, daß die Bewegungsgleichung für die Reell-Zeit-Einteilchen-Kausal-Green-Funktion nichtumkehrinvariant ist

---

Um zu erfahren, ob die Gleichung K-B(8-27) T-invariant ist, oder nicht, ist es erforderlich nach dem in Kapitel 4 gegebenen Kriterium zu prüfen, ob sich aus dieser Gleichung durch entsprechende Transformationen die Bewegungsgleichung für die ETAKgF d.h. Gleichung (8.30), ableiten läßt.

Betrachten wir die Gleichung K-B(8-28a), also

$$\begin{aligned}
 & \left[ -i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V_{eff}(1') \right] g^<(1, 1'; v) \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ g^>(1, \bar{t}; v) - g^<(1, \bar{t}; v) \right] \Sigma^<(\bar{t}, 1'; v) \\
 & - \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} g^<(1, \bar{t}; v) \left[ \Sigma^>(\bar{t}, 1'; v) - \Sigma^<(\bar{t}, 1'; v) \right].
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Wenn wir nach Vertauschen der Argumente  $1 \rightleftharpoons 1'$  den komplex-konjugierten Wert dieser Gleichung nehmen, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - U_{eff}(1) \right] [g^<(1', 1; v)]^* \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} \left\{ [g^>(1', \bar{t}; v)]^* - [g^<(1', \bar{t}; v)]^* \right\} [\Sigma^<(\bar{t}, 1; v)]^* \quad (9.2) \\
 & - \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} [g^<(1', \bar{t}; v)]^* \left\{ [\Sigma^>(\bar{t}, 1; v)]^* - [\Sigma^<(\bar{t}, 1; v)]^* \right\}.
 \end{aligned}$$

Nach Definition

$$g(1', 1; v) = \frac{1}{i} \langle T [\psi_v(1') \psi_v^+(1)] \rangle \quad (9.3)$$

gilt für  $t_1' < t_1$

$$g^<(1', 1; v) = \pm \frac{1}{i} \langle \psi_v^+(1) \psi_v(1') \rangle \quad (9.4)$$

woraus folgt

$$[g^<(1', 1; v)]^* = \pm i \langle \psi_v^+(1') \psi_v(1) \rangle \quad (9.5)$$

Andererseits ist

$$\tilde{g}(1, 1'; v) = i \langle \tilde{\Psi} [\psi_v(1) \psi_v^\dagger(1')] \rangle \quad (9.6)$$

und für den Fall  $t_{1'} < t_1$

$$\tilde{g}^>(1, 1'; v) = \pm i \langle \psi_v^\dagger(1') \psi_v(1) \rangle \quad (9.7)$$

Durch Vergleich der Gleichung (9.5) mit (9.7) sehen wir, daß gilt

$$[g^<(1', 1; v)]^* = \tilde{g}^>(1, 1'; v) \quad (9.8)$$

Auf die gleiche Weise läßt sich zeigen, daß gilt

$$[g^>(1', 1; v)]^* = \tilde{g}^<(1, 1'; v). \quad (9.9)$$

Aus der Gleichung (6.25) und Gleichung (8.26) läßt sich zeigen, daß

$$[\Sigma^z(1', 1; v)]^* = \tilde{\Sigma}^z(1, 1'; v) \quad (9.10)$$

ist. Aus der Gleichung (7.30) und Gleichung (8.23) folgt sodann

$$[V_{eff}(1)]^* = \tilde{V}_{eff}(1) \quad (9.11)$$

Aus den Gleichungen (9.8), (9.9), (9.10), (9.11) und (9.2) erhält man

$$\begin{aligned}
 & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{V_1^2}{2m} - \tilde{V}_{eff}(1) \right] \tilde{g}^>(1, 1'; v) \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; v) - \tilde{\Sigma}^<(1, \bar{t}; v) \right] \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; v) \\
 &- \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; v) \left[ \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; v) - \tilde{g}^<(\bar{t}, 1'; v) \right]. \quad (9.12)
 \end{aligned}$$

Vergleich der Gleichung (8.30) mit der Gleichung (9.12) zeigt, daß sie nicht identisch sind, daß sie sich aber nur in den untersten Grenzen der Zeitintegrale unterscheiden. In der Gleichung (8.30), die unter der Grenzbedingung abgeleitet wurde, daß sich das System in ferner Zukunft im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, ist die untere Grenze der Integration  $+\infty$ . Dagegen wird die Gleichung (9.12) unter der Annahme abgeleitet, daß sich das System in ferner Vergangenheit im thermodynamischen Gleichgewicht befand, so daß die untere Integrationsgrenze  $-\infty$  ist.

Aufgrund des Vorstehenden schließen wir, daß die Gleichung K-B(8-27) nicht umkehrinvariant ist, d.h. die geschlossene Bewegungsgleichung für die ETKGF wir nicht umkehrinvariant erst durch die Wahl der Grenzbedingung, der diese Gleichung zu genügen hat;

was wiederum bedeutet, daß die Ursache der Nichtumkehrinvarianz in der Grenzbedingung liegt.

Da die Green-Funktionen keine sehr anschauliche Interpretation haben, können wir aufgrund der Gleichung (8.30) und der Gleichung K-B (8-27) keine konkrete Aussage über die physikalischen Folgen der Nichtumkehrinvarianz machen.

Wir müssen daher der Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung näher folgen. Kadanoff und Baym haben gezeigt, daß sich aus der Gleichung K-B(8-27) die quantenmechanische kinetische Gleichung K-B(9-30) ableiten läßt, die die irreversible Bewegung eines zum Gleichgewicht in der Zukunft strebenden Systems beschreibt, so daß zu erwarten wäre, daß man aus der Gleichung (8.30) eine ähnliche Gleichung erhalten kann, die analog die irreversible Bewegung des zeitumgekehrten Systems zum Gleichgewicht in der Vergangenheit beschreiben würde.

In Kapitel 11 werden wir zeigen, daß sich diese Gleichung nur durch das Vorzeichen des Stoßterms auf der rechten Seite von der Gleichung K-B(9-7a) unterscheidet.

# 10. Die Relation zwischen der Antikausal-Green-Funktion und der "antikausalen Verteilungsfunktion"

Für die Ableitung der quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung K-B(9-16) mußten Kadanoff und Baym zuerst diejenige Funktion definieren, die der klassischen Verteilungsfunktion  $f(\vec{p}, \vec{R}, T)$  entspricht.

Da man in der Quantenmechanik den Ort  $R$  und den Impuls  $\vec{p}$  eines Teilchens wegen des Unbestimmtheitsprinzips nicht gleichzeitig bestimmen kann, hat die Verteilungsfunktion keine vollständig anschauliche physikalische Bedeutung.

Die Verteilungsfunktion, welche die meisten Eigenschaften der klassischen Verteilungsfunktion enthält, haben Kadanoff und Baym <sup>36)</sup> folgendermaßen definiert: Anstelle von Koordinaten

$\vec{r}_1, t_1$  und  $\vec{r}_1', t_1'$  in  $g^<(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_1', t_1'; U)$  führt man neue Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_1', & t &= t_1 - t_1' \\ \vec{R} &= \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_1'}{2}, & T &= \frac{t_1 + t_1'}{2} \end{aligned} \quad (10.1)$$

ein. Mit Hilfe dieser neuen Koordinaten kann

$g^<(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_1', t_1'; U)$  als  $g^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T; U)$  geschrieben werden.

Da sich  $g^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T; U)$  bezüglich  $\vec{R}, T$  nur langsam ändert, kann die neue Funktion  $g^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T; U)$

durch den Ausdruck

$$g^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T; U) \quad (10.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} [\pm i g^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T; U)]$$

definiert werden, den man als Teilchendichte mit dem Impuls  $\vec{p}$  und der Energie  $\omega$  in einem räumlich-zeitlichen Punkt  $\vec{R}, T$  interpretieren kann. Die quantenmechanische Verteilungsfunktion ist demnach

$$f(\vec{p}, \vec{R}, T) = \int \frac{d\omega}{2\pi} g^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \quad (10.3)$$

Dadurch ist die eindeutige Zuordnung zwischen der Verteilungsfunktion und der KGF hergestellt.

Auf ähnliche Weise läßt sich die quantenmechanische Verteilungsfunktion, welche der Verteilungsfunktion des zeitumgekehrten Systems entspricht, definieren. Dabei soll darauf geachtet werden, daß diese Verteilungsfunktion negative Zeit- und Impulsargumente im Vergleich zur Verteilungsfunktion des Originalsystems haben soll.

Im Kapitel 8 haben wir gezeigt, daß die AKGF in der Gleichung (8.30) für die negativen Zeitargumente  $t_1$  und  $t_1'$  definiert ist. Wenn wir für diese Funktion neue Koordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_1', \quad , \quad t = t_1 - t_1' \quad (10.4)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_1'}{2} \quad , \quad \tau = \frac{t_1 + t_1'}{2}$$

einführen, wird die neue Zeitkoordinate  $\tau = \frac{t_1 + t_1'}{2}$  immer negativ sein, d.h.  $\tau < 0$ , was wir symbolisch als  $\tau$  bezeichnen, und  $\vec{g}^>$  wird in den neuen Koordinaten als  $\vec{g}^>(\vec{r}, t; \vec{R}, \tau; U)$  ausgedrückt.

Analog zur Definition (10.2) kann die Funktion

$$\vec{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, \tau; U) \quad \text{als}$$

$$\vec{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, \tau; U)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \left[ \pm \frac{1}{i} \vec{g}^>(\vec{r}, t; \vec{R}, \tau; U) \right] \quad (10.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{-i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \left[ \pm \frac{1}{i} \vec{g}^>(\vec{r}, t; \vec{R}, \tau; U) \right]$$

definiert werden, die als die Teilchendichte mit dem Impuls

$$\vec{p} = -\vec{p} \quad \text{und Energie } \omega \quad \text{im Raum-Zeitpunkt } \vec{R}, \tau$$

des zeitumgekehrten Systems, interpretiert werden kann.

Daraus folgt die entsprechende Verteilungsfunktion

$$f(\vec{p}, \vec{r}, T_-) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T_-). \quad (10.6)$$

# 11. Ableitung der quantenmechanischen "antikausalen kinetischen Gleichung" und der "antikausalen Boltzmann-Gleichung"

Die Ableitung der quantenmechanischen "antikausalen kinetischen Gleichung" gleicht der Ableitung der quantenmechanischen kinetischen Gleichung K-B(9-7a) im Umfang und wird deshalb nicht im Ganzen hier angeführt.\*

Zum Verständnis des Ableitungsverfahrens reicht es aber, wenn man die wesentlichen Punkte der Ableitung erörtert, die auch zum Erfassen der Endergebnisse von Bedeutung sind.

Gehen wir aus von der Bewegungsgleichung für die AKgF

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - \tilde{U}_{eff}(1) \right] \tilde{g}^>(1, 1'; v) \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; v) - \tilde{\Sigma}^<(1, \bar{t}; v) \right] \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; v) \\ & - \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{t} \tilde{\Sigma}^>(1, \bar{t}; v) \left[ \tilde{g}^>(\bar{t}, 1'; v) - \tilde{g}^<(\bar{t}, 1'; v) \right], \end{aligned} \quad (11.1)$$

---

\* Siehe Anhänge C, D und E

$$\begin{aligned}
 & \left[ -i \frac{\partial}{\partial t_{1'}} + \frac{\nabla_{1'}^2}{2m} - \tilde{V}_{eff}(1') \right] \tilde{g}^>(1, 1'; v) \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{t} \left[ \tilde{g}^>(1, \bar{t}; v) - \tilde{g}^<(1, \bar{t}; v) \right] \tilde{\Sigma}^>(\bar{t}, 1'; v) \\
 & - \int_{-\infty}^{t_{1'}} d\bar{t} \tilde{g}^>(1, \bar{t}; v) \left[ \tilde{\Sigma}^>(\bar{t}, 1'; v) - \tilde{\Sigma}^<(\bar{t}, 1'; v) \right].
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Der Kürze wegen werden wir im weiteren Text anstelle von

$\tilde{g}^>(1, 1'; v)$  und  $\tilde{\Sigma}^>(1, 1'; v)$ ,  $\tilde{g}^<(1, 1')$  und  $\tilde{\Sigma}^<(1, 1')$  schreiben unter Berücksichtigung, daß  $\tilde{g}^>$  und  $\tilde{\Sigma}^>$  Funktionen des äußeren Potentials  $V(\vec{r}, t)$  sind.

Wenn wir davon ausgehen, daß sich das äußere Feld  $V(\vec{r}, t)$

langsam mit der Zeit ändert, ändern sich auch die Funktion

$\tilde{g}^>$  langsam mit der Raum-Zeit-Koordinate

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_{1'}}{2}, \quad T = \frac{t_1 + t_{1'}}{2} \tag{11.3}$$

und haben ein ausgeprägtes Maximum in den Null-Werten der Koordinaten:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad t = t_1 - t_2. \quad (11.4)$$

Wenn man Gleichung (11.2) von Gleichung (11.1) subtrahiert, die obigen neuen Koordinaten einsetzt und, wenn wir weiter alle Funktionen auf der linken Seite von der so erhaltenen Gleichung nach der Taylorsche Reihe um den Punkt  $\vec{R}, T$  entwickeln und nur die Glieder linear in  $\nabla \vec{R}$  und  $\partial/\partial T$  behalten, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\nabla \vec{R} \cdot \nabla \vec{r}}{m} - \vec{r} \cdot \nabla \vec{R} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) - t \frac{\partial}{\partial T} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \right] \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[ \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}, t - t; \vec{R}, T) \right. \\ & \quad \left. - \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}, t - t; \vec{R}, T) \right]. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit

$$\pm \frac{1}{i} \exp[i \vec{p} \cdot \vec{r} + i \omega t]$$

und Integration über  $\vec{r}$  und  $t$  ergibt

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{r}}}{m} + \nabla_{\vec{r}} \tilde{U}_{eff}(\vec{r}, T) + \frac{\partial}{\partial T} \tilde{U}_{eff}(\vec{r}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) \\
 &= \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) \tilde{\Sigma}^<(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) \\
 &- \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) \tilde{\Sigma}^<(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T),
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

worin nach der Definition (10.5)

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 &\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^>(\vec{r}, t; \vec{r}, T) \right]
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 &\times \left[ \frac{1}{i} \tilde{g}^<(\vec{r}, t; \vec{r}, T) \right].
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Entsprechend gilt für die "antikausalen Selbstenergieoperatoren"

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Sigma}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 &\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}^>(\vec{r}, t; \vec{r}, T) \right],
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

$$\tilde{\Sigma}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \quad (11.10)$$

$$\times \left[ \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right].$$

Wenn man auf der linken Seite der Gleichung (11.6)  $\vec{p}$  und  $\nabla_{\vec{p}}$  durch  $-\vec{p}$  und  $-\nabla_{\vec{p}}$ , ersetzt, weil  $\vec{p} = -\vec{p}$  ist, und unter Berücksichtigung, daß  $T < 0$  ist,\* erhält man:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}}{m} - \nabla_{\vec{R}} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \cdot \nabla_{\vec{p}} + \frac{\partial}{\partial T} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T)$$

$$= \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \quad (11.11)$$

$$- \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T).$$

Aufgrund dessen, was wir in Kapitel 10 gesagt haben, ist klar, daß die Gleichung (11.11) die "quantenmechanische kinetische Gleichung" darstellt, die den Prozeß beschreibt, der den zeitumgekehrten des mit der Gleichung K-B(9-7) beschriebenen Prozesses darstellt. Diese Gleichung nennen wir daher die "anti-kausale kinetische Gleichung".

---

\* Siehe Kapitel 8 und 10

Die Gleichung, die der generalisierten quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung K-B(9-30) entsprechen würde, werden wir nicht ableiten, weil sich ihre Ableitung von dem Vorhergehenden nicht wesentlich unterscheidet. Sie ist noch etwas umfangreicher, weil nun auch die Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung (11.5) nach der Taylorschen Reihe entwickelt und auch die Glieder, die in  $\nabla_{\vec{r}}$  und  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  linear sind, berücksichtigt werden.

Andererseits ist diese Ableitung nicht notwendig, weil man schon aufgrund des Vorhergehenden schließen kann, daß man eine Gleichung erhält, die sich von der Gleichung K-B(9-30) nur im Vorzeichen des Stoßterms unterscheidet.

Nun können wir aus der Gleichung (11.11) und aufgrund der im vorangegangenen Kapitel gegebenen Definitionen die quantenmechanische "Boltzmann-Gleichung" ableiten, die sich auf das zeitumgekehrte System bezieht, und die wir "antikausale Boltzmann-Gleichung" nennen.

Wenn wir für dieses System die "antikausale Spektralfunktion" als

$$\tilde{\alpha}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau) = \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau) + \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau) \quad (11.12)$$

definieren, so erhalten wir aufgrund der physikalischen Interpretation der "antikausalen Spektralfunktion" als Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen mit dem Impuls  $\vec{p} = -\vec{p}$  im Punkt  $\vec{r}, \tau$  die Energie  $\omega$  hat und aufgrund der Definition

der Funktionen  $f(\vec{p}, \vec{R}, T_-)$  und  $\tilde{g}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-)$ , daß

$$\tilde{g}'(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) = \tilde{\alpha}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T_-) \quad (11.13)$$

ist. Aus den Gleichungen (11.12) und (11.13) folgt, daß

$$\begin{aligned} \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) &= \tilde{\alpha}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) \\ &\times [1 \pm f(\vec{p}, \vec{R}, T_-)] \end{aligned} \quad (11.14)$$

ist. Wenn wir für  $\tilde{\alpha}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-)$  die einfachste Form wählen, d.h. für den Fall der schwachen Wechselwirkung zwischen den Teilchen, so ist

$$\tilde{\alpha}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) = 2\tilde{u} \delta[\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T_-)], \quad (11.15)$$

worin

$$\tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T_-) = \frac{p^2}{2m} - \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T_-). \quad (11.16)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T_-) &= 2\tilde{u} \delta(\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T_-)) \\ &\times \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T_-) \end{aligned} \quad (11.17)$$

und

$$\tilde{g}'(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau) = 2\tilde{u} \delta(\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{r}, \tau)) \quad (11.18)$$

$$\times [1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, \tau)].$$

Einsetzen der Ausdrücke (11.17) und (11.18) in die Gleichung (11.11) ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\vec{p} \cdot \nabla \vec{r}}{m} - \nabla_{\vec{r}} \tilde{U}_{eff}(\vec{r}, \tau) \cdot \nabla_{\vec{p}} \right] \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, \tau) \\ &= \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, \tau) \tilde{\Sigma}'(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{r}, \tau); \vec{r}, \tau) \quad (11.19) \\ & - [1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, \tau)] \tilde{\Sigma}^>(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{r}, \tau); \vec{r}, \tau). \end{aligned}$$

Wenn wir die, "antikausalen Selbstenergieoperatoren"

$$\tilde{\Sigma}' \approx$$

in der zweiten Bornschen Näherung wählen, erhalten

wir

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial}{\partial T_-} + \frac{\vec{p} \cdot \nabla \vec{r}}{m} - \nabla_{\vec{r}} \tilde{U}_{eff}(\vec{r}, T_-) \cdot \nabla_{\vec{p}} \right] \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, T_-) \\
 &= \int \frac{d\vec{p}'}{(2\bar{u})^3} \frac{d\vec{p}}{(2\bar{u})^3} \frac{d\vec{p}'}{(2\bar{u})^3} (2\bar{u})^4 \delta(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p} - \vec{p}') \\
 & \quad \times \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p'^2}{2m} - \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{\bar{p}'^2}{2m}\right) \\
 & \quad \times \frac{1}{2} \left[ v(\vec{p} - \vec{p}) \pm v(\vec{p} - \vec{p}') \right]^2 \\
 & \quad \times \left\{ \tilde{f} \tilde{f}' [1 \pm \tilde{f}] [1 \pm \tilde{f}'] + [1 \pm \tilde{f}] [1 \pm \tilde{f}'] \tilde{f} \tilde{f}' \right\}, \\
 & \text{worin } \tilde{f}' = \tilde{f}(\vec{p}', \vec{r}, T_-), \quad \tilde{f} = \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, T_-) \text{ und} \\
 & \tilde{f}' = \tilde{f}(\vec{p}', \vec{r}, T_-) \text{ ist.}
 \end{aligned} \tag{11.20}$$

Die Gleichung (11.20) unterscheidet sich von der quantenmechanischen Boltzmann-Gleichung K-B(9-16) nur im Vorzeichen des Stoßterms auf der rechten Seite der Gleichung.

Aus den physikalischen Grundsätzen heraus, nach denen sie abgeleitet wurde, folgt, daß sie eine irreversible Bewegung des zeitumgekehrten Systems zum thermodynamischen Gleichgewicht in der Vergangenheit beschreibt und deswegen kann sie "antikausale Boltzmann-Gleichung" genannt werden.

Über die Bedeutung und den physikalischen Inhalt dieser Gleichung werden wir ausführlicher im nächsten Kapitel sprechen.

12. Ursache der Irreversibilität 2) 37) 38) 39) 40) 41)

---

Kadanoff und Baym haben die quantenmechanische Boltzmann-Gleichung K-B(9-16) unter der Voraussetzung abgeleitet, das System genüge der Grenzbedingung, daß es sich im Limes  $t_0 \rightarrow -\infty$ , d.h. in der fernen Vergangenheit im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und daß es aus diesem durch Einschalten eines äußeren Feldes herausgebracht wird.

Die Verteilungsfunktion also, welche die Lösung der Boltzmann-Gleichung darstellt, genügt der Kausalitätsbedingung <sup>42) 43)</sup> d.h. ihr Wert zum Zeitpunkt  $t$  ist durch das äußere Feld bestimmt, das bis zu diesem Moment wirkte. Wir haben im Kapitel 11 gezeigt, daß man, wenn man voraussetzt, daß sich das System in ferner Zukunft, d.h. im Limes

$t_0 \rightarrow +\infty$ , im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und das äußere Feld sich in diesem Moment einschaltet, die "Boltzmann-Gleichung" mit negativem Stoßterm erhält. Die Lösung dieser Gleichung stellt die Verteilungsfunktion des zeitumgekehrten Systems dar, in dem die Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt  $t$  von dem Feld abhängt, welches auf das System nach dem Moment  $t$  wirkte, und somit der Kausalitätsbedingung nicht genügt.

Aufgrund dessen kann geschlossen werden, daß in der Methode von Kadanoff und Baym erst nach der Wahl der entsprechenden Grenzbedingung der Unterschied zwischen dem Kausal- und Antikausalverhalten des Systems festgestellt werden kann.

Hier ist die Kausalität also auf die gleiche Weise wie in der

Elektrodynamik, <sup>43)</sup> in der quantenmechanischen Streutheorie, <sup>22)</sup> und in der klassischen irreversiblen Thermodynamik <sup>44)</sup> <sup>45)</sup> eingeführt.

Die Irreversibilität erscheint also als Kausalitätsfolgerung. Es ist lehrreich, den Vergleich zwischen der hier gegebenen Ableitung der "antikausalen Boltzmann-Gleichung" mit den vorher gegebenen klassischen Ableitungen dieser Gleichung zu ziehen.

Die klassische "antikausale Boltzmann-Gleichung" haben Cohen und Berlin <sup>17)</sup> 1960 abgeleitet. Sie haben die Ableitung der Boltzmann-Gleichung aus der Liouvillschen Gleichung nach der Methode von Bogoljubov und nach der Methode von Kirkwood betrachtet. In diesen Ableitungen als auch in der originalen Boltzmannschen Ausführung erscheint die Irreversibilität als die Folge der Hypothese des "molekularen Chaos". Dieser Hypothese gemäß befinden sich die Teilchen "lange vor dem Zusammenstoß" ausreichend voneinander entfernt, so daß die Paar-Verteilungsfunktion als Produkt zweier Einteilchen-Verteilungsfunktionen ausgedrückt werden kann. Diese Voraussetzung kann also als die Grenzbedingung betrachtet werden, der die Paar-Verteilungsfunktion in der Vergangenheit genügen soll.

Da sich die Teilchen "lange nach dem Zusammenstoß" ebenfalls in ausreichender Entfernung voneinander befinden, scheint es so, als ob die der obigen Grenzbedingung analoge Bedingung auch für die Paar-Verteilungsfunktion nach dem Zusammenstoß gelten würde. Wenn man aber diese Grenzbedingung wählt, erhält man, wie Cohen und Berlin gezeigt haben, die "Boltzmann-

Gleichung" mit negativem Stoßterm, was nun zeigt, daß die Hypothese vom "molekularen Chaos" im "Postkollisionsbereich" die Boltzmann-Gleichung mit dem "falschen" Stoßterm ergibt, welche mit der Erfahrung nicht übereinstimmt.

Die "antikausale Boltzmann-Gleichung" würde das irreversible Verhalten des zeitumgekehrten Systems beschreiben, welches aber physikalisch nicht verwirklicht ist.

Die Hypothese des "molekularen Chaos" im "Postkollisionsbereich" in der klassischen Physik würde also unserer Hypothese entsprechen, daß sich das System im thermodynamischen Gleichgewicht im Limes  $t_0 \rightarrow +\infty$  befindet.

1961 haben Ta-Yau-Wu und D. Revier <sup>18)</sup> die Irreversibilität im Rahmen der Quantenstatistik diskutiert, indem sie die Pauli-Gleichung betrachtet haben. Wie bekannt <sup>18)</sup> erhält man diese mittels der "random-a priori-phase" Hypothese, die der Annahme über "molekulares Chaos" entspricht. Die genannten Autoren haben gezeigt, daß man durch Anwendung der "random-a priori-phase" Hypothese in umgekehrter Zeitrichtung die "Pauli-Gleichung" erhält, die die irreversible Bewegung des Systems zur Vergangenheit hin beschreibt, und die der "antikausalen Boltzmann-Gleichung" entsprechen würde.

Schließlich ist noch der interessante Artikel von Hoffmann und Green <sup>19)</sup> zu nennen, in dem ebenfalls die klassische Boltzmann-Gleichung abgeleitet wurde. Diese Autoren leiten diese Gleichung für ein System her, das sich im äußeren Feld befindet, welches im Limes  $t_0 \rightarrow -\infty$  zu wirken beginnt. Unter der Voraus-

setzung, daß sich das System in der fernen Zukunft im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, d.h. für  $t_0 \rightarrow +\infty$ , haben sie die "Boltzmann-Gleichung" mit dem negativen Stoßterm erhalten.

Dieses Verfahren der Ableitung der Boltzmann-Gleichung und der "antikausalen Boltzmann-Gleichung" zeigt also, daß auch in der klassischen Physik die Irreversibilität durch die Grenzbedingung eingeführt wird, die derjenigen entspricht, durch welche die Irreversibilität in der Ableitung nach der Methode von Kadanoff und Baym eingeführt wurde.

# Anhang A. Die Erweiterung der Definition der Antikausal-Green-Funktion (1.1) auf komplexe Zeitargumente ---

Wir werden zeigen, wie man aus der Definition (1.1) bzw. (1.14) den Ausdruck (1.19) erhält.

Wir betrachten den Ausdruck

$$\tilde{G}^<(t, t_0) = i 2^{-1} \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^*(t_0)]. \quad (\text{A.1})$$

Zunächst schreiben wir die großkanonische Zustandssumme  $\mathcal{Z}$  in der Form des Mittelwertes im Wechselwirkungsbild

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}}] \\ &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} e^{\beta \bar{H}_0} e^{-\beta \bar{H}}] \\ &= \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} e^{\beta H_0} e^{-\beta H}], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

worin  $\bar{H}_0 = H_0 - \mu N$ , und  $\bar{H} = H - \mu N$  ist.

Wenn wir in der Gleichung (A.2) die Faktoren

$$e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H_0} = 1 \quad \text{und} \quad e^{i\tau^* H} e^{-i\tau^* H} = 1$$

einsetzen, in denen  $\tau$  eine beliebige komplexe Zahl und  $\tau^*$  ihr konjugiert-komplexer Wert ist, erhalten wir

$$2 = \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}_0} e^{\beta H_0} e^{i \tau^* H_0} e^{-i \tau^* H_0} \right. \\ \left. \times e^{-\beta H} e^{i \tau^* H} e^{-i \tau^* H} \right] \quad (\text{A.3})$$

bzw.

$$2 = \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}_0} e^{(\beta - i \tau^*) H_0} e^{i \tau^* H_0} \right. \\ \left. \times e^{-(\beta - i \tau^*) H} e^{-i \tau^* H} \right] \\ = \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}_0} e^{-i (\tau^* + i \beta) H_0} e^{i \tau^* H_0} \right. \\ \left. \times e^{i (\tau^* + i \beta) H} e^{-i \tau^* H} \right] \\ = \text{tr} \left[ e^{-i (\tau^* + i \beta) H_0} e^{-\beta \bar{H}_0} \right. \\ \left. \times e^{i \tau^* H_0} e^{i (\tau^* + i \beta) H} e^{-i \tau^* H} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Indem wir verwenden, daß die Spur invariant ist bezüglich zyklischer Permutation der Operatoren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}_0} e^{i\tau^* H_0} e^{i(\tau^* + i\beta)H} \right. \\ &\quad \left. \times e^{-i\tau^* H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} \right] \\ &= \text{tr} \left[ e^{-\beta \bar{H}_0} e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nach (1.7) und (1.9) folgt

$$e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} = \mathcal{U}(\tau^*) \quad (\text{A.6})$$

und

$$e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} = \mathcal{U}^\dagger(\tau^* + i\beta). \quad (\text{A.7})$$

Einsetzen von (A.6) und (A.7) in (A.5) ergibt

$$\mathcal{Z} = \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} u(\tau^*) u^\dagger(\tau^* + i\beta)]. \quad (\text{A.8})$$

Wegen

$$u(\tau^*) u^\dagger(\tau^* + i\beta) = u(\tau^*, \tau^* + i\beta) \quad (\text{A.9})$$

finden wir daher:

$$\mathcal{Z} = \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}_0} u(\tau^*, \tau^* + i\beta)]. \quad (\text{A.10})$$

Der Ausdruck

$$\text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \quad (\text{A.11})$$

läßt sich für komplexe Zeitargumente auf folgende Weise transformieren: Zuerst erhalten wir durch Vertauschung der Operatoren

$$\begin{aligned} & \text{tr} [e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0)] \\ &= \text{tr} [\psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta \bar{H}}] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$= \text{tr} [\psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta M N}].$$

Wenn wir in Gleichung (A.12) den Faktor

$$e^{i\tau^*H} e^{-i\tau^*H} = 1 \quad \text{einfügen, folgt}$$

$$\text{tr} [\psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta \mu N}]$$

(A.13)

$$= \text{tr} [e^{i\tau^*H} e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta \mu N}].$$

Erneute Anwendung der zyklischen Eigenschaften der Spur ergibt

$$\text{tr} [e^{i\tau^*H} e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{\beta \mu N}]$$

(A.14)

$$= \text{tr} [e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{i\tau^*H} e^{\beta \mu N}].$$

Wir fügen noch den Faktor  $e^{-i\tau^*H_0} e^{i\tau^*H_0} = 1$  ein und erhalten

$$\text{tr} [e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{i\tau^*H} e^{\beta \mu N}]$$

$$= \text{tr} [e^{-i\tau^*H_0} e^{i\tau^*H_0} e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{-\beta H} e^{i\tau^*H} e^{\beta \mu N}] \quad (\text{A.15})$$

$$= \text{tr} [e^{i\tau^*H_0} e^{-i\tau^*H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i\tau^*H_0} e^{\beta \mu N}].$$

Jetzt fügen wir noch den Faktor  
zwischen den Faktoren  $e^{-i\tau^* H_0}$  und  $e^{\beta H_0} e^{-\beta H_0} = 1$   
ein  
und erhalten

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left[ e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i\tau^* H_0} e^{\beta H_0} \right] \\ &= \text{tr} \left[ e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{i(\tau^* + i\beta)H} \right. \\ & \quad \left. \times e^{-i\tau^* H_0} e^{\beta H_0} e^{-\beta H_0} e^{\beta H_0} \right] \\ &= \text{tr} \left[ e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) e^{i(\tau^* + i\beta)H} \right. \\ & \quad \left. \times e^{-i\tau^* H_0} e^{\beta H_0} e^{-\beta H_0} e^{-\beta H_0} e^{\beta H_0} \right] \quad (\text{A.16}) \\ &= \text{tr} \left[ e^{-\beta H_0} e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} \psi_H(t) \psi_H^\dagger(t_0) \right. \\ & \quad \left. \times e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} \right]. \end{aligned}$$

Wegen

$$e^{i\tau^* H_0} e^{-i\tau^* H} = \mu(\tau^*)$$

und

$$e^{i(\tau^* + i\beta)H} e^{-i(\tau^* + i\beta)H_0} = \mu^+(\tau^* + i\beta),$$

sowie

$$\psi_H(t) = \mu^+(t) \psi(t) \mu(t)$$

$$\psi_H^+(t_0) = \mu^+(t_0) \psi(t_0) \mu(t_0)$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & \text{tr}[e^{-\beta \bar{H}} \psi_H(t) \psi_H^+(t_0)] \\ &= \text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau^*) \mu^+(t) \psi(t) \mu(t) \\ & \quad \times \mu^+(t_0) \psi^+(t_0) \mu(t_0) \mu^+(\tau^* + i\beta)] \quad (\text{A.17}) \\ &= \text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau^*, t) \psi(t) \mu(t, t_0) \psi^+(t_0) \mu(t_0, \tau^* + i\beta)]. \end{aligned}$$

Einsetzen von (A.10) und (A.17) in (A.1) ergibt das Resultat

$$\tilde{G}'(t, t_0) = i \frac{\text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau^*, t) \psi(t) \mu(t, t_0) \psi^+(t_0) \mu(t_0, \tau^* + i\beta)]}{\text{tr}[e^{-\beta \bar{H}_0} \mu(\tau^*, \tau^* + i\beta)]} \quad (\text{A.18})$$

welches mit Gleichung (1.19) identisch ist.

Anhang B. Transformation der Funktional-Differentialgleichung für die Antikausal-Green-Funktion (6.11) in die Funktional-Integralgleichung (6.14)

---

Wir betrachten die Gleichung (6.11), d.h.

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\vec{V}_1^2}{2m} - V(1) \right] \tilde{G}(1, 1'; V) = \delta(1 - 1')$$

$$+ i \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \times \left[ \tilde{G}(1, 1'; V) \tilde{G}(2, 2'; V) \pm \frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; V)}{\delta V(2)} \right] \Big|_{t_2=t_1} \quad (\text{B.1})$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung wird mit  $\mathcal{J}$  bezeichnet

$$\mathcal{J} = \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \times \left[ \tilde{G}(1, 1'; V) \tilde{G}(2, 2'; V) \pm \frac{\delta \tilde{G}(1, 1'; V)}{\delta V(2)} \right] \Big|_{t_2=t_1} \quad (\text{B.2})$$

bzw.

$$\mathcal{J} = \int d\vec{r}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \times \left[ \tilde{G}(\vec{r}_2 t_1, \vec{r}_2 t_1; V) \pm \frac{\delta}{\delta V(\vec{r}_2 t_1)} \right] \tilde{G}(\vec{r}_1 t_1, 1'; V) \quad (\text{B.3})$$

Das Integral (B.3) läßt sich mit Hilfe der  $\delta$ -Funktionen

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_i) \quad , \quad \delta(t_1 - \bar{t}_2) \quad \text{und} \quad \delta(t_1 - \bar{t}_1)$$

als

$$J = \int d\vec{r}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_i) \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ \times \left[ \tilde{G}(\vec{r}_2 t_1, \vec{r}_2 t_1; U) \pm \frac{\delta}{\delta U(\vec{r}_2, t_1)} \right] \tilde{G}(\vec{r}_1 t_1, 1; U)$$

$$= \int d\vec{r}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_i) \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\times \int_{i\beta}^0 d\bar{t}_2 \delta(t_1 - \bar{t}_2) \left[ \tilde{G}(\vec{r}_2 \bar{t}_2, \vec{r}_2 \bar{t}_2; U) \right. \\ \left. \pm \frac{\delta}{\delta U(\vec{r}_2, \bar{t}_2)} \right] \tilde{G}(\vec{r}_1 t_1, 1; U) = \quad (B.4)$$

$$= \int d\vec{r}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_i) \int d\vec{r}_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \int_{i\beta}^0 d\bar{t}_2 \delta(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)$$

$$\times \left[ \tilde{G}(\vec{r}_2 \bar{t}_2, \vec{r}_2 \bar{t}_2; U) \pm \frac{\delta}{\delta U(\vec{r}_2, \bar{t}_2)} \right] \tilde{G}(\vec{r}_1 t_1, 1; U) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{i\beta} d\vec{r}_1 \int_{i\beta}^0 d\bar{t}_1 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \delta(t_1 - \bar{t}_1) \\
 &\quad \times \int_{i\beta} d\vec{r}_2 \int_{i\beta}^0 d\bar{t}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \delta(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) \\
 &\quad \times \left[ \tilde{G}(\vec{r}_2, \bar{t}_2, \vec{r}_2, t_2; V) \pm \frac{\delta}{\delta V(\vec{r}_2, \bar{t}_2)} \right] \tilde{G}(\vec{r}_1, \bar{t}_1, i'; V)
 \end{aligned}$$

schreiben.

Einsetzen von  $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1) \delta(t_1 - \bar{t}_1) = \delta(1 - \bar{1})$ ,  
 sowie  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \delta(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) = V(\bar{1} - \bar{2})$  in (B.4)

ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &= \int_{i\beta} d\bar{1} \int_{i\beta}^0 d\bar{2} \delta(1 - \bar{1}) V(\bar{1} - \bar{2}) \\
 &\quad \times \left[ \tilde{G}(\bar{2}, \bar{2}; V) \pm \frac{\delta}{\delta V(\bar{2})} \right] \tilde{G}(\bar{1}, i'; V) \Big|_{t_2 = t_1}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Durch Einsetzen der Gleichung (6.12), d.h.

$$\delta(1-\bar{1}) = \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V(1) \right] \tilde{G}_0(1, \bar{1}; V) \quad (B.6)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V(1) \right] \\ & \times \int_{i\beta}^0 d\bar{1} \int_{i\beta}^0 d\bar{2} V(\bar{1}-\bar{2}) \tilde{G}_0(1, \bar{1}; V) \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$\times \left[ \tilde{G}(\bar{2}, \bar{2}; V) \pm \frac{\delta}{\delta V(\bar{2})} \right] \tilde{G}(\bar{1}, 1'; V) \Big|_{t_{\bar{2}} = t_{\bar{1}}}.$$

Wenn wir nun (B.7) und

$$\delta(1-1') = \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} - V(1) \right] \tilde{G}_0(1, 1'; V) \quad (B.8)$$

in (B.1) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial^2}{\partial t_1} + \frac{p_1^2}{2m} - V(1) \right] \tilde{G}(1, 1'; U) \\ &= \left[ i \frac{\partial^2}{\partial t_1} + \frac{p_1^2}{2m} - V(1) \right] \hat{G}_0(1, 1'; U) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} & + i \left[ i \frac{\partial^2}{\partial t_1} + \frac{p_1^2}{2m} - V(1) \right] \int_{i\beta}^0 d\bar{\tau} \int_{i\beta}^0 d\bar{z} V(\bar{\tau} - \bar{z}) \\ & \times \left[ \tilde{G}(\bar{z}, \bar{z}'; U) \pm \frac{\delta}{\delta U(\bar{z})} \right]_{t_{\bar{z}}=t_{\bar{z}'}} \tilde{G}_0(1, \bar{\tau}; U) \tilde{G}(\bar{\tau}, 1'; U), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{G}(1, 1'; U) &= \tilde{G}_0(1, 1'; U) + i \int_{i\beta}^0 d\bar{\tau} \int_{i\beta}^0 d\bar{z} V(\bar{\tau} - \bar{z}) \\ & \times \tilde{G}_0(1, \bar{\tau}; U) \left[ \tilde{G}(\bar{z}, \bar{z}'; U) \pm \frac{\delta}{\delta U(\bar{z})} \right]_{t_{\bar{z}}=t_{\bar{z}'}} \tilde{G}(\bar{\tau}, 1'; U). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Dies ist Gleichung (6.14).

Anhang C. Transformation der Bewegungsgleichung für  
die Reell-Zeit-Antikausal-Green-Funktion  
(11.1) bzw. (11.2) für den Fall eines lang-  
sam veränderlichen Feldes

---

Wenn wir Gleichung (11.2) von Gleichung (11.1) subtrahieren,  
erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \left[ i \frac{\partial}{\partial t_1} + i \frac{\partial}{\partial t_1'} + \frac{p_1^2 - p_1'^2}{2m} - [\tilde{V}_{eff}(1) - \tilde{V}_{eff}(1')] \right] \tilde{g}^>(1, 1') \\
 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{1} [\tilde{\Sigma}_1^>(1, \bar{1}) - \tilde{\Sigma}_1^<(1, \bar{1})] \tilde{g}^>(\bar{1}, 1') \\
 &+ \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{1} \tilde{g}^>(1, \bar{1}) [\tilde{\Sigma}_1^>(\bar{1}, 1') - \tilde{\Sigma}_1^<(\bar{1}, 1')] \quad (C.1) \\
 &- \int_{-\infty}^{t_1'} d\bar{1} \tilde{\Sigma}_1^>(1, \bar{1}) [\tilde{g}^>(\bar{1}, 1') - \tilde{g}^<(\bar{1}, 1')] \\
 &- \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{1} [\tilde{g}^>(1, \bar{1}) - \tilde{g}^<(1, \bar{1})] \tilde{\Sigma}_1^>(\bar{1}, 1')
 \end{aligned}$$

Wenn wir davon ausgehen, daß sich das äußere Feld  $U(\vec{r}, t)$  langsam mit der Zeit ändert, kann man annehmen, daß sich auch die Funktionen  $\tilde{g}^2$  langsam mit den Raum-Zeitkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_{1'}}{2}, \quad T = \frac{t_1 + t_{1'}}{2} \quad (C.2)$$

ändern, und ein ausgeprägtes Maximum in den Null-Werten der Koordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}, \quad t = t_1 - t_{1'} \quad (C.3)$$

haben.

Wenn wir auf der linken Seite der Gleichung (C.1) die in (C.2) und (C.3) definierten neuen Koordinaten einsetzen, erhalten wir

$$L.S.(C.1) = \left\{ i \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_{1'}} \right) + \frac{V_1^2 - V_{1'}^2}{2m} \right. \quad (C.4)$$

$$\left. - \left[ \tilde{U}_{eff}(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, T + \frac{t}{2}) - \tilde{U}_{eff}(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}, T - \frac{t}{2}) \right] \right\} \tilde{g}(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}, t_1 - t_{1'}; \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_{1'}}{2}, \frac{t_1 + t_{1'}}{2}),$$

worin wir  $\vec{r}_1, t_1$  durch  $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, t_1 = T + \frac{t}{2}$  und  $\vec{r}_{1'}, t_{1'}$  durch  $\vec{r}_{1'} = \vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}, t_{1'} = T - \frac{t}{2}$  ersetzt haben.

Es ist offensichtlich, daß gilt

$$i \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_{1'}} \right) = i \frac{\partial}{\partial T}, \quad (C.5)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2 - V_{1'}^2}{2m} &= \frac{(V_1 + V_{1'}) \cdot (V_1 - V_{1'})}{2m} \\ &= \frac{2 \nabla \vec{R} \cdot \nabla \vec{r}}{2m} = \frac{\nabla \vec{R} \cdot \nabla \vec{r}}{m}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Wenn wir  $\tilde{U}_{eff}(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, T + \frac{t}{2})$  und  $\tilde{U}_{eff}(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}, T - \frac{t}{2})$  in eine Taylorische Reihe um den Punkt  $\vec{R}, T$  entwickeln und nur die Glieder linear in  $\nabla \vec{R}$  und  $\frac{\partial}{\partial T}$  behalten, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\tilde{U}_{eff}(\vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, T + \frac{t}{2}) - \tilde{U}_{eff}(\vec{R} - \frac{\vec{r}}{2}, T - \frac{t}{2}) \\ &= \left[ \vec{r} \cdot \nabla \vec{R} + t \frac{\partial}{\partial T} \right] \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T), \end{aligned} \quad (C.7)$$

wobei wir angenommen haben, daß  $\vec{r}, t$  klein im Vergleich zu  $\vec{R}, T$  sind.

Einsetzen (C.5), (C.6) und (C.7) in (C.4) ergibt

$$\begin{aligned} L.S. (C.1) &= \left\{ i \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\nabla \vec{R} \cdot \nabla \vec{r}}{m} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \vec{r} \cdot \nabla \vec{R} + t \frac{\partial}{\partial T} \right] \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \right\} \tilde{g}^>(\vec{r}, t; \vec{R}, T). \end{aligned} \quad (C.8)$$

Wenn wir in dem ersten Term auf der rechten Seite der Gleichung (C.1) ebenfalls die neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}\bar{\vec{r}} &= \bar{\vec{r}}_1 - \vec{r}_1, \quad t = \bar{t}_1 - t_1', \\ \bar{\vec{R}} &= \frac{\bar{\vec{r}}_1 + \vec{r}_1}{2}, \quad \bar{T} = \frac{\bar{t}_1 - t_1'}{2}\end{aligned}\tag{C.9}$$

einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-\infty}^{t_1} d\bar{\tau} \left[ \tilde{Z}^>(1, \bar{\tau}) - \tilde{Z}^<(1, \bar{\tau}) \right] \tilde{g}^>(\bar{\tau}, \tau') \\ &= \int_{-\infty}^t d\bar{\vec{r}} d\bar{t} \left[ \tilde{Z}^>(\vec{r} - \bar{\vec{r}}, t - \bar{t}; \bar{\vec{R}} + \frac{\vec{r}}{2}, T + \frac{t}{2}) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{Z}^<(\vec{r} - \bar{\vec{r}}, t - \bar{t}; \bar{\vec{R}} + \frac{\vec{r}}{2}, T + \frac{t}{2}) \right] \\ &\quad \times \tilde{g}^>(\bar{\vec{r}}, \bar{t}; \bar{\vec{R}} - \frac{\vec{r} - \bar{\vec{r}}}{2}, T - \frac{t - \bar{t}}{2}).\end{aligned}\tag{C.10}$$

Wegen des oben gesagten können wir annehmen, daß näherungsweise

$$\bar{\vec{r}} \approx 0, \quad \bar{t} \approx 0, \quad \vec{r} - \bar{\vec{r}} \approx 0, \quad t - \bar{t} \approx 0.\tag{C.11}$$

Damit erhalten wir

$$I_1 = \int_{-\infty}^t d\vec{r} d\vec{t} \left[ \tilde{\Sigma}^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) - \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \right] \times \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}). \quad (C.12)$$

Analog können wir den zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung (C.1) in der Form

$$I_2 = \int_t^{-\infty} d\vec{r} d\vec{t} \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R} + \frac{\vec{r}-\vec{r}}{2}, \mathcal{T} + \frac{t-\vec{t}}{2}) \times \left[ \tilde{\Sigma}^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \mathcal{T} - \frac{\vec{t}}{2}) - \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \mathcal{T} - \frac{\vec{t}}{2}) \right] \quad (C.13)$$

schreiben, woraus nach (C.11) folgt

$$I_2 = \int_t^{-\infty} d\vec{r} d\vec{t} \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \times \left[ \tilde{\Sigma}^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) - \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \right]. \quad (C.14)$$

Aus den Gleichungen (C.12) und (C.14) folgt

$$I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{-\infty} d\vec{r} d\vec{t} \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \times \left[ \tilde{\Sigma}^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) - \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \right]. \quad (C.15)$$

Den dritten Term auf der rechten Seite der Gleichung (C.1) können wir mit neuen Koordinaten als

$$I_3 = \int_{-\infty}^0 d\vec{r} dt \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}; \vec{R}+\frac{\vec{r}}{2}, T-\frac{t}{2}) \quad (C.16)$$

$$\times \left[ \tilde{g}^>(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}+\frac{\vec{r}-\vec{r}}{2}, T+\frac{t-\bar{t}}{2}) - \tilde{g}^<(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}+\frac{\vec{r}-\vec{r}}{2}, T+\frac{t-\bar{t}}{2}) \right]$$

schreiben.

Wegen (C.11) erhalten wir

$$I_3 = \int_{-\infty}^0 d\vec{r} d\bar{t} \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}, \vec{R}, T) \quad (C.17)$$

$$\times \left[ \tilde{g}^>(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, T) - \tilde{g}^<(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, T) \right].$$

In gleicher Weise erhalten wir für den vierten Term auf der rechten Seite der Gleichung (C.1)

$$I_4 = \int_0^{-\infty} d\vec{r} d\bar{t} \left[ \tilde{g}^>(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, T) - \tilde{g}^<(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, T) \right] \quad (C.18)$$

$$\times \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}; \vec{R}, T).$$

Aus (C.17) und (C.18) folgt

$$I_3 + I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} d\vec{t} \left[ \tilde{g}^{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) - \tilde{g}^{\leftarrow}(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \right] \quad (C.19)$$

$$\times \tilde{\Sigma}^{\vec{r}}(\vec{r} - \vec{R}, t - \vec{t}; \vec{R}, T)$$

und schließlich folgt aus den Gleichungen (C.1), (C.15) und (C.19)

$$R.S.(C.1) = I_1 + I_2 - (I_3 + I_4)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} d\vec{t} \left[ \tilde{g}^{\vec{r}}(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}^{\leftarrow}(\vec{r} - \vec{R}, t - \vec{t}; \vec{R}, T) \right. \quad (C.20)$$

$$\left. - \tilde{g}^{\leftarrow}(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}^{\vec{r}}(\vec{r} - \vec{R}, t - \vec{t}; \vec{R}, T) \right].$$

Damit können wir endlich die Gleichung (C.1) nach (C.8) und (C.20) in der Form

$$\begin{aligned}
 & \left\{ i \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} + \frac{\nabla_{\vec{R}} \cdot \nabla_{\vec{r}}}{m} - \left[ \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}} + t \frac{\partial}{\partial \mathcal{T}} \right] \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, \mathcal{T}) \right\} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, \mathcal{T}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{t} \left[ \tilde{g}(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \tilde{\Sigma}_1'(\vec{r} - \vec{r}, t - \bar{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \right. \\
 & \quad \left. - \tilde{g}(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \tilde{\Sigma}_1'(\vec{r} - \vec{r}, t - \bar{t}; \vec{R}, \mathcal{T}) \right]
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

schreiben.

Dies ist Gleichung (11.5).

Anhang D. Die "Wigner-Transformation" der Gleichung (11.5)

Wir werden zeigen, wie man aus der Gleichung (11.5) die Gleichung (11.6) erhält.

Betrachten wir dazu die Gleichung (11.5), d.h.

$$\begin{aligned} & \left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla_{\vec{R}} \cdot \nabla_{\vec{r}}}{m} - \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, \tau) - \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, \tau) \right] \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, \tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \left[ \tilde{g}(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, \tau) \tilde{\Sigma}'(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}; \vec{R}, \tau) \right. \\ & \quad \left. - \tilde{g}'(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, \tau) \tilde{\Sigma}'(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}; \vec{R}, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit

$$\pm \frac{1}{i} \exp[i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t] \quad \text{und nehmen die Integration}$$

über  $\vec{r}$  und  $t$  vor, d.h.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla_{\vec{R}} \cdot \nabla_{\vec{r}}}{m} - \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, \tau) - \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, \tau) \right] \\ & \quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, \tau) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\ & \quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, \bar{t}; \vec{R}, \tau) \right] \tilde{\Sigma}'(\vec{r}-\vec{r}, t-\bar{t}; \vec{R}, \tau) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\ \times \tilde{g}(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}(\vec{r} - \vec{r}, t - \vec{t}; \vec{R}, T) \right].$$

Bezeichnen wir mit  $J$  die linke Seite der Gleichung (D.2), dann ist

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} i \frac{\partial}{\partial T} \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \\ + \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \frac{\vec{r} \cdot \nabla_{\vec{r}}}{m} \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \\ - \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \vec{r} \cdot \nabla_{\vec{R}} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \quad (D.3)$$

$$\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} t \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{r}, \tau) \\
 & \quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{r}, \tau) \right] \\
 & = I_1 + I_2 - I_3 - I_4,
 \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}
 I_1 & = i \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 & \quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{r}, \tau) \right].
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau) & = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 & \quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{r}, \tau) \right]
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

folgt

$$I_1 = i \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, \tau). \tag{D.6}$$

$I_2$  ist gegeben durch

$$I_2 = \frac{\nabla \vec{R}}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \times \nabla \vec{r} \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \quad (D.7)$$

$$= \frac{\nabla \vec{R}}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \times \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right]. \quad (D.8)$$

Nach partieller Integration, sowie mit Hilfe von Gleichung (D.5) erhält man

$$I_2 = -i \frac{\vec{p} \cdot \nabla \vec{R}}{m} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T). \quad (D.9)$$

$I_3$  ist gegeben durch

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \vec{r} \cdot \nabla \vec{R} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \quad (D.10)$$

$$\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \\ = \nabla \vec{R} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \vec{r} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^{\rightarrow}(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right]. \quad (D.11)$$

Wegen  $\vec{r} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = -i \vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$  folgt

$$I_3 = -i \vec{p} \cdot \vec{r} \tilde{V}_{eff}(\vec{r}, T) \cdot \vec{p} \tilde{g}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T). \quad (D.12)$$

Schließlich ist  $I_4$  gegeben durch

$$I_4 = \frac{\partial}{\partial T} \tilde{V}_{eff}(\vec{r}, T) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p}\cdot\vec{r} + i\omega t} \times t \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}(\vec{r}, t; \vec{r}, T) \right]. \quad (D.13)$$

Wegen  $t e^{i\omega t} = -i \frac{\partial}{\partial \omega} e^{i\omega t}$  folgt

$$I_4 = -i \frac{\partial}{\partial T} \tilde{V}_{eff}(\vec{r}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{g}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T). \quad (D.14)$$

Einsetzen der Gleichungen (D.6), (D.9), (D.12) und (D.14) in die Gleichung (D.3) ergibt

$$J = i \left[ \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{m} + \vec{p} \cdot \vec{r} \tilde{V}_{eff}(\vec{r}, T) \cdot \vec{p} + \frac{\partial}{\partial T} \tilde{V}_{eff}(\vec{r}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \times \tilde{g}(\vec{p}, \omega; \vec{r}, T). \quad (D.15)$$

Wenn wir mit  $J_1$  den ersten Term auf der rechten Seite der Gleichung (D.2) bezeichnen, dann ist

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\
 &\quad \times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \right] \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, T)
 \end{aligned}
 \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{t} \, e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega \vec{t}} \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{g}^>(\vec{r}, \vec{t}; \vec{R}, T) \right] \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d(\vec{r}-\vec{r}) \int_{-\infty}^{\infty} d(t-\vec{t}) \, e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}-\vec{r}) + i\omega(t-\vec{t})} \\
 &\quad \times \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, T)
 \end{aligned}
 \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
 &= i \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \int_{-\infty}^{\infty} d(\vec{r}-\vec{r}) \int_{-\infty}^{\infty} d(t-\vec{t}) \\
 &\quad \times e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}-\vec{r}) + i\omega(t-\vec{t})} \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}^<(\vec{r}-\vec{r}, t-\vec{t}; \vec{R}, T) \right].
 \end{aligned}
 \tag{D.18}$$

Da

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\ &\times \left[ \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}_1^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \end{aligned} \quad (D.19)$$

folgt

$$J_1 = i \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T). \quad (D.20)$$

Bezeichnen wir mit  $J_2$  den zweiten Term auf der linken Seite der Gleichung (D.2), dann ist

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \left[ \frac{1}{i} \tilde{g}^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \\ &\times i \int_{-\infty}^{\infty} d(\vec{r} - \vec{r}') \int_{-\infty}^{\infty} d(t - \bar{t}) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + i\omega(t - \bar{t})} \\ &\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{r} - \vec{r}', t - \bar{t}; \vec{R}, T) \right]. \end{aligned} \quad (D.21)$$

Da

$$\begin{aligned} \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \\ &\times \left[ \frac{1}{i} \tilde{g}^<(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right] \end{aligned} \quad (D.22)$$

und

$$\tilde{\Sigma}_1^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t} \quad (D.23)$$

$$\times \left[ \pm \frac{1}{i} \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{r}, t; \vec{R}, T) \right]$$

folgt

$$I_2 = i \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T). \quad (D.24)$$

Aus den Gleichungen (D.2), (D.3), (D.16) und (D.21) folgt

$$I = I_1 - I_2. \quad (D.25)$$

Einsetzen von (D.15), (D.20) und (D.24) in (D.25) ergibt das Resultat:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}}{m} + \nabla_{\vec{R}} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \cdot \nabla_{\vec{p}} + \frac{\partial}{\partial T} \tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T)$$

$$= \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \quad (D.26)$$

$$- \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T).$$

Die Gleichung (D.26) stimmt mit Gleichung (11.6) überein.

Anhang E. Die Ableitung der "antikausalen Boltzmann-Gleichung" (11.20)

---

Betrachten wir die Gleichung (11.11), d.h.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{v}_{\vec{R}}}{m} - \vec{v}_{\vec{R}} \tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \cdot \vec{v}_{\vec{p}} + \frac{\partial}{\partial T} \tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \frac{\partial}{\partial \omega} \right] \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \\ &= \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \\ &- \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}_1^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T), \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

worin nach den Gleichungen (11.13) und (11.14)

$$\tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) = \tilde{a}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \quad (\text{E.2})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) &= \tilde{a}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) \\ &\times [1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T)]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Wenn wir für  $\tilde{a}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T)$  die einfachste Näherung wählen, d.h. den Fall schwacher Wechselwirkung zwischen den Teilchen betrachten, so ist

$$\tilde{a}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) = 2\tilde{u} \delta(\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T)), \quad (\text{E.4})$$

worin

$$\tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T) = \frac{p^2}{2m} - \tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \quad (\text{E.5})$$

ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}^>(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) &= 2\tilde{u} \delta(\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T)) \\ &\quad \times \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{g}^<(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T) &= 2\tilde{u} \delta(\omega - \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T)) \\ &\quad \times [1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T)]. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Einsetzen der Ausdrücke (E.6) und (E.7) in die Gleichung (E.1) und Integration über  $\omega$  ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}}{m} - \nabla_{\vec{R}} \tilde{U}_{\text{eff}}(\vec{R}, T) \cdot \nabla_{\vec{p}} \right] \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \\ &= \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \tilde{\Sigma}^<(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T); \vec{R}, T) \\ &\quad - [1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T)] \tilde{\Sigma}^>(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T); \vec{R}, T). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Wenn wir im Ausdruck für  $\tilde{\Sigma}_1^{\prime\prime}(\vec{p}, \omega; \vec{R}, T)$ , d.h. in

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1^{\prime\prime}(\vec{p}, \omega, \vec{R}, T) &= \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\bar{\omega}}{2\pi} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d\bar{\omega}'}{2\pi} (2\pi)^4 \\ &\times \delta(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p} - \vec{p}') \delta(\omega + \omega' - \bar{\omega} - \bar{\omega}') \\ &\times \frac{1}{2} \left[ v(\vec{p} - \vec{p}) \pm v(\vec{p} - \vec{p}') \right]^2 \\ &\times \tilde{g}^{\prime\prime}(\vec{p}', \omega'; \vec{R}, T) \tilde{g}^{\prime\prime}(\vec{p}, \bar{\omega}; \vec{R}, T) \tilde{g}^{\prime\prime}(\vec{p}', \bar{\omega}'; \vec{R}, T) \end{aligned} \quad (E.9)$$

die Ausdrücke (E.6) und (E.7) einsetzen und die Integration über  $\omega'$ ,  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\omega}'$  vornehmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1^{\prime\prime}(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T)) &= \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \\ &\times \delta(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p} - \vec{p}') \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p'^2}{2m} - \frac{\bar{p}^2}{2m} - \frac{\bar{p}'^2}{2m}\right) \\ &\times \frac{1}{2} \left[ v(\vec{p} - \vec{p}) \pm v(\vec{p} - \vec{p}') \right]^2 \\ &\times \left[ 1 \pm \tilde{f}(\vec{p}', \vec{R}, T) \right] \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \tilde{f}(\vec{p}', \vec{R}, T). \end{aligned} \quad (E.10)$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Sigma}(\vec{p}, \omega = \tilde{E}(\vec{p}, \vec{R}, T)) &= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \\
 &\times \delta(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p} - \vec{p}') \delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}'^2}{2m}\right) \\
 &\times \frac{1}{2} \left[ v(\vec{p} - \vec{p}) \pm v(\vec{p} - \vec{p}') \right]^2 \\
 &\times \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \left[ 1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \right] \left[ 1 \pm \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \right].
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

Einsetzen der Gleichungen (E.10) und (E.11) in die Gleichung (E.8) ergibt das Resultat:

$$\begin{aligned}
 &\left[ \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\vec{p} \cdot \nabla_{\vec{R}}}{m} - \nabla_{\vec{R}} \tilde{U}_{eff}(\vec{R}, T) \cdot \nabla_{\vec{p}} \right] \tilde{f}(\vec{p}, \vec{R}, T) \\
 &= \int \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}'}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(\vec{p} + \vec{p}' - \vec{p} - \vec{p}') \\
 &\times \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p'^2}{2m} - \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}'^2}{2m}\right) \frac{1}{2} \left[ v(\vec{p} - \vec{p}) \pm v(\vec{p} - \vec{p}') \right]^2 \\
 &\times \left\{ \tilde{f} \tilde{f}' \left[ 1 \pm \tilde{f} \right] \left[ 1 \pm \tilde{f}' \right] + \left[ 1 \pm \tilde{f} \right] \left[ 1 \pm \tilde{f}' \right] \tilde{f} \tilde{f}' \right\},
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

worin  $\tilde{f}' = \tilde{f}(\vec{p}', \vec{r}, T)$  ,  $\tilde{\bar{f}} = \tilde{f}(\vec{p}, \vec{r}, T)$  und  
 $\tilde{\bar{f}}' = \tilde{f}(\vec{p}', \vec{r}, T)$  ist.

Dies ist die "antikausale Boltzmann-Gleichung" (11.20).

L i t e r a t u r

1. L.P. Kadanoff und G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, W.A. Benjamin, New York 1963
2. M. Bunge, Time Asymmetry, Time Reversal, and Irreversibility, in: The Study of Time, Ed. J.T. Fraser, Springer-Verlag 1962, S.122-130
3. R.L. Liboff, Introduction to the Theory of Kinetic Equations, J. Wiley and Sons, New York 1969
4. K. Huang, Statistische Mechanik, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964, Bd. I, II
5. H.B. Hollinger, J. Chem. Phys. 36 (1962) 3208
6. Ref. 1, S 94-97
7. C.Horie und S.A. Krumhansl, Phys. Rev. 136 (1964) A 1397
8. R.A. Craig, Ann. Phys. 40 (1966) 416
9. R.C. Tolman, The Principles of Statistical Mechanics, Oxford Univ. Press 1938
10. R. Janckel, Foundations of Classical und Quantum Statistical Mechanics, Pergamon Press, London 1969
11. Sun-Tak Hwang, Found. Phys. 2 (1971) 315
12. R. Mills, Propagators for Many-particle Systems, Gordon and Breach Science Publishers, New York 1969, S.27, 32 und 112

13. L.V. Keldysh, Sov. Phys. J.E.T.P. 20 (1965) 1018
14. R.A. Craig, J. Math. Phys. 9 (1969) 605
15. C.P. Enz, Green Functions applied to Phonon Problems, in:  
The Many-Body Problem, Ed. L.M. Carrido, Plenum Press 1969,  
S. 1-16
16. Ref. 12, Kap. 5.1
17. E.G.D. Cohen und T.H. Berlin, Physica 26 (1960) 717
18. Ta-You Wu, Helv. Phys. Acta 34 (1961) 661
19. D.K. Hoffmann und H.S. Green, J. Chem. Phys. 43 (1965) 4007
20. Ref. 12, S. 72, Gl. (5.8)
21. H.J. Bremerman und L. Durand, J. Math. Phys. 2 (1961) 240
22. Ta-You Wu und T. Ohmura, Quantum Theory of Scattering,  
Prentice-Hall, New Jersey 1962, S.296-297
23. Ref. 12, S. 73
24. Ref. 1, Kap. 1-2
25. T.D. Schultz, Quantum Field Theory and the Many-Body Problem,  
Gordon and Breach 1964
26. S.S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum  
Field Theory, Harper and Row, New York 1961
27. Ref. 1, S.41-42
28. L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen  
Physik III, Akademie-Verlag, Berlin 1965

29. U.Fano, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 74
30. S. Fujita, Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics, W.B. Saunders, London 1966
31. L.V. Peldush, Sov. Phys. J.E.T.P. 20 (1965) 1018
32. Ref. 1, Kap. 5
33. G. Baym, Phys. Rev. 127 (1962) 1391
34. Ref. 22, S.303
35. J.M. Ziman, Elements of Advanced Quantum Theory, Cambridge Univ. Press 1969
36. Ref. 1, Kap. 6-4
37. T. Gold, Am. J. Phys. 30 (1962) 403
38. G. Süßmann, Jahrbuch der J. W. v. Goethe-Universität, Frankfurt a.M. 1965
39. R. Mirman, Found. Phys. 5 (1975) 491
40. T. Gold (Ed), The Nature of Time, Cornell Univ. Press 1967, S.187-195
41. P.G. Bergman, Foundations Research in Physics, in: Delaware Seminar in the Foundations of Physics, Springer-Verlag 1967, Vol.1, S.1-15
42. F. Hund, Zeit als physikalischer Begriff, in: The Study of Time, Ed. J.T. Fraser, Springer-Verlag 1972, S. 39-58

- 43. J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Sec. Ed.  
S. Weley and Sons 1975, S.223
- 44. I. Prigogine, Non-Equilibrium Statistical Mechanics,  
J. Wiley and Sons, New York 1966, Vol.I
- 45. B. Leaf und W. C. Schieve, Physica 30 (1964) 1389



## Danksagung

Herrn Prof. Dr. G. Süßmann danke ich für die anregende Unterstützung dieser Arbeit. Herrn Dr.G. Wegmann bin ich für die Anregung zu meinem Arbeitsgebiet und eine fortlaufende Betreuung zu Dank verpflichtet.

Dem DAAD danke ich für die Ermöglichung meines Gastaufenthaltes in Deutschland.



## L e b e n s l a u f

Ich wurde am 19.10.1947 als Tochter des Angestellten Aleksandar Nikolić und dessen Ehefrau Dobrinka Nikolić, in Pirot S.F.R. Jugoslawien geboren.

Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule in Sukovo/Pirot S.F.R.J. Nach unserem Umzug nach Zrenjanin/S.F.R.J. setzte ich die Volksschule bis 1962 fort.

Von 1963-1966 besuchte ich das Gymnasium, wo ich im Mai die Reifeprüfung bestand.

Mit dem Wintersemester 1966/67 begann ich an der Technischen Fakultät Belgrad das Studium der Technischen Physik, wo ich eine Diplomarbeit in der Quantenmechanik bei Prof. Dr. Dragiša M. Ivanović ausführte und die Diplom-Hauptprüfung im Juni 1972 ablegte. Im Mai 1974 begann ich mit meiner Dissertation bei Herrn Prof. Dr. G. Süßmann, an dessen Lehrstuhl ich seit Oktober 1973 als Stipendiatin des DAAD bin.









